

**Raquel  
Santos Costa**

**Previsão de Vendas Aplicada a Perfis de  
Alumínio**



**Raquel  
Santos Costa**

**Previsão de Vendas Aplicada a Perfis de  
Alumínio**

Relatório de estágio apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica da Doutora Isabel Maria Simões Pereira, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.



A vida só pode ser comprendida, olhando-se para trás  
mas só pode ser vivida, olhando-se para a frente.

Soren Kierkegaard



## **O júri**

Presidente

**Prof. Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra**

Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Vogais

**Prof. Doutora Magda Sofia Valério Monteiro**

Professora Adjunta da Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Águeda

**Prof. Doutora Isabel Maria Simões Pereira**

Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro (orientadora)





## **agradecimentos / acknowledgements**

Primeiramente agradeço à minha família, em particular aos meus pais e à minha irmã Carla por todo o amor e esforço que fizeram para que eu pudesse chegar até aqui. Agradeço à minha irmã gêmea Mariana por todo o companheirismo, pela força e apoio em certos momentos difíceis e por toda a amizade incondicional ao longo destes cinco anos. Quero deixar o meu profundo e sentido agradecimento à Professora Doutora Isabel Pereira, por toda a dedicação, compreensão e confiança que sempre manifestou. O estímulo e a exigência crescente foram determinantes para a conclusão deste trabalho.

Quero também agradecer à Extrusal, mais propriamente ao engenheiro Eduardo Duarte e a todo o pessoal do DSI, por toda a ajuda, compreensão e companheirismo demonstrado ao longo do período de estágio. Por último deixo um agradecimento muito especial ao meu namorado João e a todos os meus amigos, em especial ao meu companheiro de estágio Micael. Um muito obrigada por todos os momentos maravilhosos e inesquecíveis que partilhamos nesta caminhada e que levarei para o resto da vida.



## resumo

Cada vez mais, as empresas necessitam de tomar decisões que otimizem os desperdícios existentes, como por exemplo, ajudar na diminuição dos custos associados a stock.

Assim a modelação de séries temporais e os métodos de previsão constituem uma ferramenta fundamental para auxiliar na tomada de decisões na gestão de stocks em empresas.

Neste relatório de estágio, o principal objetivo consiste em fazer previsão de quantidades de stocks existentes para os próximos 3 meses, considerando três perfis de alumínio da empresa Extrusal, sediada em Aveiro. Para se efetuar a previsão faz-se a modelação considerando os modelos ARIMA e usando a correspondente metodologia Box e Jenkins e os modelos com Amortecimento Exponencial.

Tendo em vista a obtenção de intervalos de previsão, a metodologia de Box e Jenkins exige que os resíduos tenham uma distribuição normal. Uma vez que este pressuposto nem sempre acontece nas series observadas e por outro lado para se incorporar a variabilidade devida à estimação dos parâmetros, desenvolve-se e aplica-se, ainda em alternativa, a metodologia bootstrap de reamostragem.

Os modelos são escolhidos tendo como base os critérios AIC e BIC e as respetivas previsões são avaliadas em termos dos Erros Quadráticos Médios correspondentes.



## **abstract**

Increasingly, companies need to take decisions that optimize the existing waste, such as help in the decrease of the costs associated with stocks.

Thereby time series modeling and forecast methods are essential tool to support the decision making in the companies stock management.

In this thesis, the main goal is to predict the amount of existing stocks for the next three months, considering the aluminum profiles currently available in Extrusal, based in Aveiro. To make the forecasts, the modeling procedure is made taking into account the ARIMA processes and using the corresponding Box-Jenkins methodology and models with Exponential Smoothing.

In order to obtain forecasts intervals, Box-Jenkins methodology requires that residuals has a normal distribution. As this assumption doesn't always happen in the observed time series and also to incorporate the variability due to parameters estimation, it is developed an applied, in alternative, the bootstrap resampling methodology.

The models are chosen based on the AIC and BIC criteria and the respective point forecasts are evaluated in terms of the corresponding Mean Square Errors.



# Índice

Índice	i
Lista de Tabelas	v
Lista de Figuras	vii
Abreviaturas	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Séries Temporais e Processos Estocásticos</b>	<b>5</b>
2.1 Processos Estocásticos Estacionários . . . . .	6
2.2 Funções Autocovariância e Autocorrelação e Função Autocorrelação Parcial em processos estacionários . . . . .	8
2.3 Modelos Lineares para Séries Temporais Estacionárias . . . . .	9
2.3.1 Modelo Autoregressivo AR(p) . . . . .	10
2.3.2 Modelo Média Móvel MA(q) . . . . .	13
2.3.3 Modelo Autoregressivo de Média Móvel ARMA(p,q) . . . . .	15
2.4 Modelos Lineares para Séries Temporais não Estacionárias . . . . .	18
2.4.1 Transformações de Séries não estacionárias em Séries Estacionárias	18
2.4.2 Modelos Integrados Mistos Não Sazonais e Sazonais . . . . .	19
<b>3 Modelação ARIMA - Método de Box e Jenkins</b>	<b>23</b>
3.1 Identificação . . . . .	24
3.1.1 Estacionarização da série (d, D e S) . . . . .	24
3.1.2 Identificação pelas FAC e FACP (p,P,q,Q) . . . . .	25
3.2 Estimação dos parâmetros . . . . .	25
3.2.1 Método dos Momentos . . . . .	26
3.2.2 Estimativas de Máxima Verossimilhança e de Mínimos Quadrados	27

3.3	Avaliação do Diagnóstico do Modelo . . . . .	30
3.3.1	Avaliação da qualidade estatística . . . . .	30
3.3.2	Avaliação da qualidade de ajustamento . . . . .	33
3.4	CrITÉrios de Seleção de Modelos . . . . .	35
3.5	Método de Previsão em Modelos ARIMA . . . . .	37
3.5.1	Previsão em modelos Estacionários . . . . .	38
3.5.2	Previsão em Modelos Não Estacionários . . . . .	38
3.5.3	Previsão de Séries Transformadas . . . . .	39
3.5.4	CrITÉrios de comparação da qualidade de previsão . . . . .	40
3.6	Intervalos de Previsão . . . . .	41
3.6.1	Intervalo de Previsão Assintótico . . . . .	42
3.6.2	Intervalos de Previsão Bootstrap para Modelos ARIMA . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Modelos de Decomposição -Métodos de Alisamento Exponencial</b>	<b>47</b>
4.1	Classificação dos Métodos de Alisamento Exponencial . . . . .	48
4.2	Alisamento Exponencial Simples (N,N) . . . . .	51
4.3	Método Linear de Holt (A,N) . . . . .	53
4.4	Método de Holt-Winters . . . . .	54
4.4.1	Método Multiplicativo de Holt-Winter (A,M) . . . . .	54
4.4.2	Método Aditivo de Holt-Winter (A,A) . . . . .	55
4.5	Modelo de espaço de estados, ETS . . . . .	56
4.6	Considerações sobre modelos ETS - Métodos de Alisamento Exponencial vs Modelos de Espaço de Estados . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Caso de Estudo</b>	<b>61</b>
5.1	Apresentação da Empresa Extrusal e Descrição do Problema Proposto .	61
5.2	Perfil A 080 . . . . .	64
5.2.1	Metodologia Box e Jenkins para a série do faturado do perfil A 080	64
5.2.2	Modelação automática de um ARIMA . . . . .	74
5.2.3	Metodologia de Alisamento Exponencial para a série do faturado do perfil A 080 . . . . .	77
5.2.4	Modelo ETS para a série do faturado do perfil A 080 . . . . .	82
5.2.5	Comparação de Resultados e Previsão da série do faturado do perfil A 080 . . . . .	86
5.3	Perfil A 333 . . . . .	88
5.3.1	Metodologia Box e Jenkins para a série do faturado do perfil A 333	88
5.3.2	Modelação automática de um ARIMA . . . . .	98
5.3.3	Método de Alisamento Exponencial para a série do faturado do perfil A333 . . . . .	99



5.3.4	Modelo ETS para a série do faturado do perfil A333 . . . . .	103
5.3.5	Comparação de Resultados e Previsão da Série do Faturado do Perfil A 333 . . . . .	107
5.4	Perfil B555 . . . . .	109
5.4.1	Intervalos de Previsão Bootstrap para modelos ARIMA . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>117</b>
<b>7</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>123</b>
<b>A</b>	<b>Apêndices</b>	<b>129</b>



# Lista de Tabelas

2.1	Comparação dos diferentes tipos de processos ARMA(p,q), adaptado de Murteira et al.[30] . . . . .	17
3.1	Principais características das FAC e FACP dos processos estacionários não sazonais lineares. . . . .	26
4.1	Modelos obtidos através da conjugação dos diferentes tipos de tendência e de sazonalidade- Métodos de Alisamento Exponencial. . . . .	51
5.1	Critérios de seleção, AIC e BIC aplicados nos modelos. . . . .	69
5.2	Previsão obtida para os dados logaritmizados, para os dados originais e valores reais do faturado desde janeiro de 2015 até julho de 2015. . . .	74
5.3	Comparação entre a previsão obtida para os dados logaritmizados usando o modelo ARIMA(2,1,1), as previsões para os dados originais e os valores reais do faturado desde janeiro de 2015 até julho de 2015. . . . .	78
5.4	Estimativa das componentes do modelo (N,N). . . . .	79
5.5	Estimativa das componentes do modelo (N,A). . . . .	80
5.6	Estimativa das componentes do modelo ETS(M,N,M). . . . .	83
5.7	Tabela com os valores reais do faturado do perfil A 080 desde janeiro até julho de 2015, bem como as previsões obtidas pelo modelo ETS(M,N,M) e os respectivos intervalos de confiança a 95% e a 80%. . . . .	86
5.8	Valores reais e previstos para a série do faturado do perfil A 080. . . . .	87

5.9	EQM para os cinco modelos estudados. . . . .	88
5.10	Critérios de seleção, AIC e BIC aplicados nos modelos. . . . .	93
5.11	Previsão obtida para os dados logaritmizados, para os dados originais e valores reais do faturado desde janeiro de 2015 até julho de 2015. . . .	98
5.12	Estimativa das componentes do modelo de Holt-Winter Aditivo. . . . .	101
5.13	Estimativa dos parâmetros e dos estados iniciais do modelo ETS(M,N,M).104	
5.14	Tabela com os valores reais do faturado do perfil A333 desde janeiro até julho de 2015, bem como as previsões obtidas pelo modelo ETS(M,N,M) e os respectivos intervalos de confiança a 95% e a 80%. . . . .	107
5.15	Valores reais e previstos usando vários modelos para a série do faturado do perfil A 333. . . . .	108
5.16	EQM para os quatro modelos em estudo. . . . .	108
5.17	Comparação dos valores obtidos com os valores reais no Perfil B 555. .	114
5.18	Comparação dos valores obtidos com os valores reais no Perfil A 080. .	116

# Lista de Figuras

3.1	Etapas da metodologia apresentada por Box e Jenkins. . . . .	24
4.1	Sucessões cronológicas que contemplam os diferentes tipos de tendência e de sazonalidade. . . . .	50
5.1	Cronograma do faturado do perfil A080, $X_t$ . . . . .	65
5.2	Cronograma do logaritmo do faturado do perfil A080, $Y_t = \ln X_t$ . . . . .	66
5.3	FAC e FACP estimada de $Y_t$ . . . . .	67
5.4	Decomposição STL de $Y_t = \ln X_t$ . . . . .	68
5.5	FAC dos resíduos e teste de Ljung Box. . . . .	72
5.6	Q-Q Plot dos resíduos obtidos com o modelo $SARIMA(0, 0, 1) \times (0, 0, 1)_{12}$ . . . . .	73
5.7	Representação da previsão obtida dos próximos 12 meses pelo método de Box e Jenkins para os dados transformados. . . . .	73
5.8	Avaliação da qualidade de ajustamento do modelo. . . . .	76
5.9	Representação da previsão obtida para o ano de 2015 pelo método automático para os dados transformados. . . . .	77
5.10	Soma dos quadrados dos erros associados a cada valor de $\alpha \in ]0, 1[$ . . . . .	79
5.11	FAC e FACP da componente residual do modelo (N,N) e do modelo (N,A.) . . . . .	80
5.12	Representação das estimativas do faturado desde 2004 até 2015 obtidas pelo modelo (N,N). . . . .	82

5.13	Representação das estimativas do faturado desde 2004 até 2015 obtidas pelo modelo (N,A). . . . .	83
5.14	FAC e FACP da componente residual do modelo ETS(M,N,M). . . . .	84
5.15	Representação da previsão do ano de 2015 considerando o modelo ETS(M,N,M). . . . .	85
5.16	Cronograma do faturado do perfil A 333, $F_t$ , desde janeiro de 2004 até dezembro de 2014. . . . .	89
5.17	Cronograma da série logaritimizada, $Z_t$ . . . . .	89
5.18	FAC e FACP estimada da sucessão $Z_t$ . . . . .	90
5.19	Decomposição STL de $Z_t$ . . . . .	91
5.20	Cronograma, FAC e FACP estimada dada pela sucessão $\nabla Z_t$ . . . . .	92
5.21	Cronograma, FAC e FACP estimada da série logaritimizada, $\nabla_{12}\nabla Z_t$ . . . . .	92
5.22	FAC dos resíduos, teste de Ljung Box e Q-Q Plot. . . . .	96
5.23	Representação da previsão obtida dos próximos 12 meses pelo método de Box e Jenkins para os dados transformados. . . . .	97
5.24	Decomposição STL da série do faturado do perfil A 333. . . . .	100
5.25	FAC e FACP da componente residual do modelo de Holt Winter Aditivo aplicado à serie do faturado do perfil A333. . . . .	102
5.26	Representação das estimativas do faturado obtidas pelo modelo (A,A). . . . .	103
5.27	Decomposição pelo método ETS(M,N,M). . . . .	104
5.28	FAC e FACP da componente residual do modelo ETS(M,N,M). . . . .	105
5.29	Representação da previsão do ano de 2015 considerando o modelo ETS(M,N,M) e do intervalo de confiança a 80% e a 95% de confiança. . . . .	106
5.30	Cronograma do faturado do perfil B555 e cronograma da série do faturado logaritimizada, desde janeiro de 2004 até dezembro de 2014. . . . .	109
5.31	Decomposição STL da série logaritimizada. . . . .	110
5.32	FAC dos resíduos e teste de Ljung-Box. . . . .	111
5.33	Q-Q Plot dos resíduos obtidos com o modelo ARIMA(2,1,1). . . . .	112

A.1	Modelos de Alisamento Exponencial, Hyndman e Athanasopoulos[17]. .	139
A.2	Modelos de espaço de estados com erros aditivos, Hyndman e Athanasopoulos[17]- representação de modelos ETS na forma de espaço de estados. . . . .	140
A.3	Modelos de espaço de estados com erros multiplicativos, considerando Hyndman e Athanasopoulos[17]. . . . .	141





# Abreviaturas e símbolos

<i>ADF</i>	teste Ampliado de Dickey Fuller
<i>AR</i>	Modelo Autoregressivo
<i>ARIMA</i>	Modelo Autoregressivo Integrado de Médias Moveis
<i>ARMA</i>	Modelo Autoregressivo de Médias Móveis
<i>ETS</i>	Modelo de Alisamento Exponencial
<i>FAC</i>	Função Autocovariância e Autocorrelação
<i>FACP</i>	Função Autocorrelação Parcial
<i>i.i.d.</i>	independentes e identicamente distribuídos(as)
<i>MA</i>	Modelo Média Móvel
$N(0, \sigma_\varepsilon^2)$	Distribuição Normal de parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma_\varepsilon^2$
$RBN(0, \sigma_\varepsilon^2)$	Ruído branco com distribuição Normal de parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma_\varepsilon^2$
$RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$	Ruído branco com valor médio 0 e variância $\sigma_\varepsilon^2$
<i>SARIMA</i>	Modelo Autoregressivo Sazonal Integrado de Média Móvel
<i>STL</i>	Modelo de Decomposição na Tendência e Sazonalidade
$t_{n-p-q}$	Distribuição t-Student com $(n - p - q)$ graus de liberdade
<i>vs</i>	<i>versus</i>



# Capítulo 1

## Introdução

Atualmente, as empresas preocupam-se cada vez mais em planejar e controlar a produção de forma a obter um menor custo e uma maior produtividade. Para isso, necessitam de tomar decisões que permitam minimizar todos os desperdícios existentes. Os métodos de previsão são uma ferramenta importante que auxilia no processo de tomada de decisão. Por exemplo, calcular a previsão de vendas dos produtos para períodos futuros ajuda a decidir qual a quantidade de matéria-prima a encomendar, o tempo necessário de trabalho das máquinas, a alocação de funcionários, a diminuição dos custos de stock e, além disso, evita o não cumprimento de contratos previamente confirmados com os clientes. No entanto, muitas empresas apresentam uma certa “desacreditação” relativamente ao processo de previsão devido a questões políticas e sociais que as envolvem e que muitas vezes fazem com que a previsão falhe. Contudo, é importante ter em conta que as previsões apenas indicam possibilidades dos valores futuros, e que têm por base a análise do comportamento de dados passados. Neste sentido, a previsão não deve ser feita analisando os dados isoladamente, mas sim na sua globalidade, considerando o contexto.

Em 1995, Hillier e Lieberman[18], classificaram os métodos de previsão em dois grupos: os qualitativos e os quantitativos. Os métodos qualitativos baseiam-se em

especulações ou intuição de funcionários da empresa que trabalham nela há algum tempo, e que conseguem estabelecer paralelismos com outras situações semelhantes já vivenciadas. Os métodos quantitativos baseiam-se na análise do comportamento de dados passados com vista à previsão dos futuros. Neste relatório, apenas são abordados os métodos quantitativos.

Segundo Morettin e Toloi[28] e Makridakis et.al.[26], o Método de Decomposição Clássica foi um dos primeiros métodos utilizados na análise de séries temporais. Este método quantitativo considera que qualquer série temporal pode ser decomposta em quatro componentes não observáveis: tendência, sazonalidade, variação cíclica e componente aleatória ou residual. Além disso, considera que uma série temporal pode ser escrita como uma soma ou multiplicação das suas componentes. Quando com o aumento ou diminuição do nível da tendência, vem associado a um aumento ou a uma diminuição da amplitude dos movimentos periódicos, o modelo aconselhável é o multiplicativo. Por outro lado, se a amplitude dos movimentos periódicos permanece estável em torno da tendência, o modelo mais aconselhável é o aditivo. Este método foi bastante usado até o início dos anos 60, contudo, hoje é considerado obsoleto e tendo sido praticamente abandonado.

A partir dos anos 60 houve um grande desenvolvimento dos métodos classificados como automáticos e que ainda hoje são bastante usados. Segundo Pereira[35] e Morettin e Toloi[29], os Métodos Automáticos são aqueles métodos que podem ser diretamente programados no computador, podendo requerer uma intervenção humana mínima. Na literatura, os métodos classificados como automáticos são, por exemplo, os Métodos de Médias Móveis, o Método de Amortecimento Harmónico de Harrison, o Método de Amortecimento Exponencial de Brown, o Método de Holt-Winters. De entre estes será abordado neste relatório, o Método de Amortecimento Exponencial.

Nos anos 70, Box e Jenkins[6], apresentaram uma metodologia completamente diferente das existentes, e que colmatava o problema da não estacionaridade. O Método de Box e Jenkins baseia-se na ideia de que as séries não estacionárias podem tornar-se esta-

cionárias através de operações de diferenciação. Além disso, este considera três grandes etapas: a identificação do modelo estacionário ARMA, a estimação dos parâmetros e a avaliação do diagnóstico, só depois é que se parte para a previsão.

Na maioria dos trabalhos publicados, a previsão é feita com o pressuposto da normalidade dos resíduos. Mas este pressuposto nem sempre é verificado, como mostra Bartkiewicz[4], e portanto nem sempre se conseguem obter facilmente os intervalos de confiança para valores preditos. Uma das alternativas encontradas na literatura para a obtenção de intervalos de confiança é a utilização de metodologias de reamostragem, em particular o bootstrap, uma vez que este procedimento não requer o pressuposto de normalidade da distribuição dos resíduos, Fan e Yao[11].

O método de bootstrap, proposto em 1979 por Efron[9], começou a ser utilizado no âmbito das séries temporais a partir de 1984, nomeadamente na construção de intervalos de confiança para parâmetros de modelos, na realização de testes de hipóteses, na correção do enviesamento de estimadores, na construção de intervalos de confiança para previsão, entre outras utilidades. A maior parte dos trabalhos publicados, onde se utiliza o bootstrap para a construção de intervalos de confiança para a previsão, são baseados nos modelos ARMA. Em 1990, Thombs e Schucany[43] propõem um método de bootstrap para a construção de intervalos de previsão em modelos autoregressivos, efetuando o bootstrap, utilizando a forma backward do processo e fixando-se os últimos  $p$  valores da série, sendo  $p$  a ordem do maior coeficiente autorregressivo. Em 2004, Pascual et al.[33] publicaram um artigo onde construíam intervalos de confiança de previsão para modelos ARIMA, mas sem utilizar a sua forma backward.

Neste relatório de estágio são utilizados dois métodos de previsão, o Método de Amortecimento Exponencial e o Método de Box e Jenkins utilizando o bootstrap para construir intervalos de previsão. Estes métodos serão usados para prever o faturado em quilogramas de certos perfis de alumínio. O problema em causa, surgiu no âmbito do estágio curricular decorrido na empresa Extrusal.

A Extrusal é uma empresa de extrusão e tratamento de perfis de alumínio que

surgiu no mercado português em 1972, em Aveiro. Como qualquer outra empresa, pretende minimizar todos os desperdícios existentes na extrusão do alumínio, bem como otimizar todo o processo de produção dos seus perfis. Para isso, necessita de obter uma metodologia que possa prever o que vai ser vendido.

O objetivo deste relatório é realizar uma análise do faturado de alguns produtos de caixilharia e obter a previsão de futuros períodos de sete meses, por forma a saber a quantidade a produzir de cada um desses perfis de alumínio, de modo a que todos os pedidos dos períodos seguintes sejam satisfeitos.

Este relatório encontra-se organizada em 7 capítulos, no capítulo um faz-se uma introdução, no segundo, terceiro e quarto capítulo faz-se uma contextualização teórica dos conceitos usados. Nomeadamente, no capítulo 2 aborda-se modelos para séries estacionárias e séries não estacionárias, bem como as transformações necessárias para estacionarizar a série. No capítulo 3 apresenta-se todas etapas da metodologia de Box e Jenkins para a obtenção de intervalos de previsão, bem como a alternativa de intervalos de previsão bootstrap para modelos ARIMA, quando o modelo falha o pressuposto da normalidade dos resíduos. No quarto capítulo, apresentam-se os Métodos de Alisamento Exponencial e os Modelos de Espaço de Estados. No capítulo 5, apresenta-se a aplicação dos métodos abordados nos capítulos anteriores, em três perfis de alumínio de uma empresa, bem como a análise dos resultados obtidos. O capítulo 6 consiste num resumo comentado das conclusões e no final do relatório inclui-se o Apêndice A - com todos os programas usados para a obtenção dos resultados e um Apêndice B - com tabelas que contêm as equações de todos os modelos de Alisamento Exponencial e de Espaço de Estados.

## Capítulo 2

# Séries Temporais e Processos Estocásticos

Uma série temporal é um conjunto de observações  $X_t$ , estando cada uma associada a um instante particular  $t$ . Esse instante em que é obtida cada uma das observações é registrado e usado na análise e modelação da série.

As séries temporais têm variadas aplicações, por exemplo, na agronomia ( em produções e áreas cultivadas anuais), na economia (taxas de juro, preços de venda de um produto, . . . . .), na engenharia (intensidade do som num determinado local), na medicina (eletrocardiograma), na meteorologia (pluviosidade anual num determinado local) e nas ciências sociais (taxa de mortalidade).

As séries temporais podem ser classificadas em relação ao conjunto de instantes de tempo em que estas são observadas, como discretas ou contínuas. Ao longo desta dissertação irão apenas ser consideradas séries temporais discretas.

A análise de séries temporais baseia-se na decomposição de quatro tipos básicos de variações: tendência, sazonalidade, movimentos oscilatórios e ruído.

A tendência é caracterizada como sendo um movimento regular e contínuo ao longo do tempo, refletindo um movimento ascendente ou descendente. Os movimentos sazo-

nais são oscilações que ocorrem com certa regularidade, num curto período de tempo. Os movimentos oscilatórios ou variações cíclicas, associam-se a fases alternadas de expansão e depressão, mas não apresentam qualquer tipo de periodicidade. Já o ruído ou componente aleatória engloba não só os movimentos esporádicos ocasionais, como todos os movimentos da série que não foram possíveis identificar, uma vez que não obedecem a nenhuma lei comportamental capaz de ser descrita.

Os modelos determinísticos (modelos que predizem o futuro com exatidão), não são adequados para descrever fenómenos dinâmicos, observados no mundo real. Assim, o objetivo da teoria dos processos estocásticos é o estudo de mecanismos dinâmicos que proporcionem meios de análise de uma sequência de observações definidas em instantes de tempo.

## 2.1 Processos Estocásticos Estacionários

**Definição 2.1.1** (Processo estocástico). *Um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias  $\{X_t : t \in T\}$  classificada mediante um parâmetro  $t$  que varia num intervalo de tempo  $T$ .*

Assim para cada  $t$ ,  $X_t$  é uma variável aleatória com função de distribuição

$$F(x) = P(X_t \leq x), x \in \mathfrak{R}.$$

Uma série temporal é uma realização de um processo estocástico, ou seja, uma série temporal  $x_1, x_2, \dots, x_t$  pode ser considerada como uma realização amostral de uma população infinita constituída por uma infinidade de outros possíveis resultados para o conjunto  $\{X_t : t \in T\}$ .

Um processo estocástico pode ser considerado estacionário, se todas as características do comportamento do processo não são alteradas ao longo do tempo, ou seja a origem temporal não é importante. Se as características do processo forem alteradas ao



longo do tempo, significa que o processo é não estacionário. Além disso, um processo estacionário pode ser considerado estritamente estacionário ou fracamente estacionário.

**Definição 2.1.2** (Processo estocástico estritamente estacionário). *Um processo  $\{X_t : t \in T\}$  diz-se estritamente estacionário se a distribuição conjunta de  $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$  for a mesma de  $X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k}$  qualquer que seja  $k$ , ou seja,*

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = F(x_1, \dots, x_n; t_1 + k, \dots, t_n + k)$$

para  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e para quaisquer  $t_1, \dots, t_n + k$  de  $T$ .

Em particular, se um processo é estritamente estacionário então as distribuições unidimensionais são invariantes ao longo do tempo, pelo que a média  $\mu(t)$  é constante e igual a  $\mu$  e a variância  $v(t) = \sigma^2$ , para todo  $t \in T$ .

**Definição 2.1.3** (Processo estocástico fracamente estacionário ou estacionário de segunda ordem). *Um processo estocástico  $\{X_t : t \in T\}$  diz-se fracamente estacionário sse*

$$E[X_t] = E[X_{t+k}] = \mu, \text{ para } k \in Z$$

$$V[X_t] = V[X_{t+k}] = \sigma^2, \text{ para } \forall t \in T, k \in Z$$

$$Cov(X_t, X_{t+k}) = Cov(X_{t+m}, X_{t+m+k}) = \gamma(k), \text{ para } k, m \in Z, t \in T$$

Como se observa, um processo é estacionário de segunda ordem ou fracamente estacionário se todos os momentos até à segunda ordem (média e variância) permanecem inalterados ao longo do tempo e se a covariância depende apenas do desfaseamento.

Uma vez que a estacionaridade estrita é muito forte apenas se exige a estacionaridade de segunda ordem, pelo que, usualmente utiliza-se o termo estacionaridade para referir esta última situação.

## 2.2 Funções Autocovariância e Autocorrelação e Função Autocorrelação Parcial em processos estacionários

**Definição 2.2.1** (Função de Autocovariância). *Seja  $\{X_t : t \in Z\}$  uma série estacionária de valor médio  $E[X_t] = \mu$  e variância  $V[X_t] = \sigma^2$ , a função de autocovariância é definida por:*

$$\gamma(k) = \text{cov}(X_t, X_{t+k}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)].$$

Para cada valor de  $k$ , a função autocovariância mede a intensidade com que pares de valores do processo, separados por um intervalo de tempo de amplitude  $k$ , se relacionam.

A função de autocovariância tem as seguintes propriedades:

- (i)  $\gamma(0) = \sigma^2$ ;
- (ii)  $|\gamma(k)| \leq \gamma(0)$ ;
- (iii)  $\gamma(k) = \gamma(-k)$ .

A função de autocorrelação (FAC) do processo é definido por:

$$\rho(k) = \text{corr}(X_t, X_{t+k}) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}.$$

Para cada valor de  $k$  a função de autocorrelação mede a correlação entre os pares de valores do processo, separados por um intervalo de tempo amplitude  $k$  e possui as mesmas propriedades da função de autocovariância, exceto que  $\rho(0) = 1$ . Excetuando casos especiais, à medida que  $k$  aumenta,  $\gamma(k)$  e  $\rho(k)$  diminuem. Naturalmente é de se esperar que a capacidade de memória do processo seja limitada, portanto a capacidade de retenção no instante  $t + k$ , do que se passou no instante  $t$ , é diminuta.

O conceito de autocorrelação pode ser generalizada. Quando se tem interesse estudar a correlação entre duas observações da série,  $X_t$  e  $X_{t+k}$ , eliminando a dependência

dos termos intermédios,  $X_{t+1}, X_{t+2}, \dots, X_{t+k-1}$ , obtém-se a função denominada por autocorrelação parcial (FACP).

O conjunto das autocorrelações parciais de desfasamento  $k$  é dada por  $\{\phi_{kk}, k = 1, 2, \dots\}$ , onde  $\phi_{kk} = \frac{|\rho_k^*|}{|\rho_k|}$  e  $\rho_k^*$  é a matriz de autocorrelação substituindo a última coluna pelo vetor de autocorrelações  $[\rho_1 \rho_2 \dots \rho_k]^T$ .

## 2.3 Modelos Lineares para Séries Temporais Estacionárias

Anteriormente, introduziram-se os conceitos de função de autocorrelação e autocorrelação parcial, que permitem obter as relações existentes na série temporal entre observações desfasadas.

Em 1927, com o objetivo de analisar séries temporais, Yule[46] supôs que cada observação pode ser considerada como sendo gerada por uma sequência de choques aleatórios e independentes entre si,  $\varepsilon_t, t \in T$ . Cada um deles segue uma distribuição normal com média zero e variância constante  $\sigma_\varepsilon^2$ . Esta sequência de choques com estas características é designada por *processo de ruído branco*, denotado por *RB*. Assim, este processo não é mais do que uma combinação linear de choques aleatórios, formando o modelo linear do tipo **Média Móvel**, cuja formulação é

$$X_t = \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

onde  $\psi_1, \psi_2, \dots$  são constantes reais.

Outra forma de representar o modelo é usar o **operador atraso  $B$**  que, quando aplicado a uma série temporal, dá origem à mesma série temporal, retardada um período, isto é,

$$BX_t = X_{t-1}$$

ou mais geralmente

$$B^k X_t = X_{t-k}.$$

Os processos cuja observação no instante  $t$  é uma combinação linear do que se observa nos instantes anteriores, acrescida de um choque aleatório causado por um ruído branco,  $\varepsilon_t$ , são designados por processos **Autoregressivos**, cuja a forma é

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \dots + \varepsilon_t.$$

Muitas vezes, os modelos anteriores são combinados, formando os modelos **Autoregressivos de Médias Móveis (ARMA)**. Para processos não estacionários, tem-se os modelos **Autoregressivos Integrados de Médias Móveis (ARIMA)**, enquanto que para dados que apresentem sazonalidade se tem o modelo **Autoregressivo Sazonal Integrado de Média Móvel (SARIMA)** que se apresenta no capítulo seguinte.

### 2.3.1 Modelo Autoregressivo AR(p)

**Definição 2.3.1** (Processo autoregressivo). *Um processo  $X_t$  é um processo autoregressivo de ordem  $p$ ,  $AR(p)$  que pode ser escrito na forma*

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

onde  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  são constantes não nulos e  $\varepsilon_t$  representa o ruído branco.

O processo  $AR(p)$  anteriormente definido tem valor médio  $\mu = 0$ . Se a média  $\mu$  de  $X_t$  não for nula, substitui-se  $X_t$  por  $X_t - \mu$  e tem-se

$$X_t = \delta + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.2)$$

onde  $\delta = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$ .

Usando o operador atraso, a equação 2.1 anterior pode ser escrita

$$\phi_p(B)X_t = \varepsilon_t$$

onde  $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$  é designado por polinómio autoregressivo.

Diz-se que um processo é invertível se possuir a representação autoregressiva, isto é,

$$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i X_{t-i}, \phi_0 = 1. \quad (2.3)$$

Portanto, o modelo autoregressivo como seria de se esperar, é sempre invertível.

### Condições de estacionaridade

O processo autoregressivo pode ser escrito na forma

$$\phi_p(B)X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = \phi_p(B)^{-1}\varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = \Psi(B)\varepsilon_t$$

onde  $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$  é o polinómio autoregressivo. Considerando  $G_i^{-1}, i = 1, 2, \dots, p$ , as raízes de  $\phi_p(B) = 0$  então  $\phi_p(B) = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B)\dots(1 - G_p B)$  e expandindo em frações parciais, tem-se o seguinte modelo Ar(p)

$$X_t = \Psi(B)\varepsilon_t = \phi_p(B)^{-1}\varepsilon_t = \sum_{i=1}^p \frac{k_i}{1 - G_i B} \varepsilon_t.$$

Para que  $X_t$  esteja definido é necessário que  $\Psi(B) = \phi_p(B)^{-1}$  convirja, por isso deve-se ter necessariamente  $|G_i^{-1}| > 1, i = 1, 2, \dots, p$ , o que é equivalente a dizer que as raízes do polinómio autoregressivo devem estar fora do círculo unitário.

Consequentemente para que o processo Ar(p) seja estacionário, as raízes do polinómio  $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$  têm também de estar fora do círculo unitário.

### Função de autocovariância e autocorrelação

Para se obter a função de autocovariância, pode-se multiplicar a equação (2.1) por  $X_{t-k}$  e calcular-se as esperanças, isto é,

$$\begin{aligned}
X_t X_{t-k} &= \phi_1 X_{t-1} X_{t-k} + \dots + \phi_p X_{t-p} X_{t-k} + \varepsilon_t X_{t-k}, \\
E[X_t X_{t-k}] &= \phi_1 E[X_{t-1} X_{t-k}] + \dots + \phi_p E[X_{t-p} X_{t-k}] + 0, \\
\gamma_k &= \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}, \quad k = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Dividindo esta ultima expressão por  $\gamma_0 = \sigma^2$ , obtém-se a seguinte expressão para a função de autocorrelação,

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Fazendo  $k = 1, 2, \dots, p$  e considerando  $\rho_0 = 1$ , obtém-se as seguintes equações de Yule-Walker

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\
&\vdots \\
\rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Matricialmente, pode-se expressar as equações de Yule-Walker por

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}.$$

A FAC nos processos autoregressivos apresenta um decaimento gradual, isto é, converge para zero exponencialmente.

### Função de autocorrelação parcial

Tendo em conta que a função de autocorrelação parcial é dada por

$$\phi_{kk} = \frac{|\rho_k^*|}{|\rho_k|} \text{ para } k = 1, 2, \dots \tag{2.5}$$

Num processo autoregressivo, a função de autocorrelação parcial é diferente de zero e dada por (2.5) para  $k = 1, 2, \dots, p-1$ , para  $k = p$  tem-se  $\phi_{kk} = \phi_k$  e para  $k = p+1, p+2, \dots$  a função toma o valor zero, uma vez que não existem os coeficientes  $\phi_{p+1}, \phi_{p+2}, \dots$ . Então, a função de autocorrelação parcial num processo autoregressivo apresenta uma queda brusca para  $k \geq p+1$ , isto é,

$$\phi_{kk} \begin{cases} \neq 0 & \text{para } k = 1, 2, \dots, p \\ = 0 & \text{para } k = p+1, p+2, \dots \end{cases}$$

### 2.3.2 Modelo Média Móvel MA(q)

**Definição 2.3.2** (Processo de Médias Moveis). *Um processo  $X_t$  é um processo de médias móveis de ordem  $q$ , MA( $q$ ) se satisfaz a equação*

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.6)$$

onde  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  são constantes não nulos.

Usando o operador atraso, a equação (2.6) pode ser escrita na forma

$$X_t = \theta_q(B) \varepsilon_t$$

onde  $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$  representa o polinómio de médias móveis de ordem  $q$ .

#### Condições de invertibilidade

Um processo é invertível se se conseguir escrever na forma (2.3). Considerando que  $X_t = \theta_q(B) \varepsilon_t \Leftrightarrow \theta_q^{-1}(B) X_t = \varepsilon_t$  e  $\pi(B) = \theta_q^{-1}(B)$  tem-se  $\varepsilon_t = \pi(B) X_t$ . Então a condição de invertibilidade do processo é que  $\pi(B)$  convirja. Como  $\pi(B) = \theta_q^{-1}(B)$  então necessariamente as raízes da equação característica  $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q = 0$  devem estar todas fora do círculo unitário.

Note-se que as duas formas equivalentes de apresentação do modelo linear geral,

$$\pi(B)X_t = \varepsilon_t \text{ e } X_t = \Psi(B)\varepsilon_t$$

onde

$$\Psi(B) = \pi^{-1}(B)$$

refletem a dualidade existente entre esses modelos lineares, Fisher[12]. Pode perceber-se a dualidade entre a estacionaridade e a invertibilidade dos processos, caracterizadas em função da convergência das séries  $\Psi(B)$  e  $\pi(B)$ , respetivamente. Assim, pode concluir-se que a estacionaridade funciona para os processos autoregressivos, assim como a invertibilidade funciona para os processos de médias móveis. Portanto, um processo de média móveis é sempre estacionário e é invertível se as raízes do polinómio de médias móveis estiverem fora do círculo unitário.

### **Função de autocovariância e autocorrelação**

Considere-se o modelo definido em (2.6), onde  $E[X_t] = 0$ , a variância é dada por  $\gamma_0 = \sigma^2 = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2$  e a função de autocovariância dada por

$$\gamma_k = \sigma_\varepsilon^2(-\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \dots + \theta_q\theta_{q-k}), \quad 0 < k \leq q \text{ e } \gamma_k = 0, \quad k > q.$$

Para a função de autocorrelação tem-se

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_{k+1}\theta_1 + \dots + \theta_q\theta_{q-k}}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{para } 0 < k \leq q \\ 0 & \text{para } k > q \end{cases}$$

.

Como se pode ver, a FAC dos processos MA(q), apresenta uma queda brusca para  $k \geq q + 1$ .

### **Função de autocorrelação parcial**

A função de autocorrelação apresenta uma expressão geral complicada, no entanto, verifica-se que esta é majorada pela soma de duas exponenciais amortecidas, quando



as raízes do polinómio de médias móveis são reais e por uma senoide amortecida quando essas raízes são complexas. Assim, em qualquer dos dois casos, a função de correlação parcial tende gradualmente para zero, Murteira et al.[30]. Em suma, a FAC dos processos AR(p) que decai gradualmente para zero, comporta-se como a FACP dos processos MA(q), por outro lado a FACP dos processos AR(p) comporta-se da mesma forma que a FAC dos processos MA(q), decaindo bruscamente para zero.

### 2.3.3 Modelo Autoregressivo de Média Móvel ARMA(p,q)

Seja  $X_t$  um processo estocástico estacionário que apresenta características que não permitem a sua caracterização através de um processo puramente autoregressivo ou puramente de média móvel mas que exibe uma estrutura que resulte da combinação de ambas. Então esse processo é considerado um modelo misto, obtido pela agregação desses dois processos sendo designado por modelo ARMA(p,q). Este modelo, desde que parcimonioso (com poucos parâmetros) tem elevada potencialidade.

**Definição 2.3.3** (Processo Autoregressivo de Médias Móveis). *Um processo  $X_t$  é um processo autoregressivo de médias móveis de ordens  $p$  e  $q$ , ARMA(p,q) se satisfaz a equação*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (2.7)$$

A equação (2.7) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\phi_p(B)X_t = \theta_q(B)\varepsilon_t$$

onde  $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$  representa o polinómio autoregressivo de ordem  $p$  e  $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$  representa o polinómio de médias móveis de ordem  $q$ .

### Condições de invertibilidade e estacionaridade

Os termos do processo de média móvel da equação (2.7) não impõem nenhuma restrição para a estacionaridade do processo ARMA(p,q), sendo esta estabelecida pelas parcelas do processo autoregressivo. Já a condição de invertibilidade é exigida pelas parcelas do processo de médias móveis. Portanto, para o processo ser estacionário, as raízes de  $\phi_p(B) = 0$  devem estar fora do círculo unitário. Além disso, para o processo ser invertível, as raízes de  $\theta_q(B) = 0$  devem também estar fora do círculo unitário.

### **Função de autocovariância, autocorrelação e autocorrelação parcial**

Para se obter a função de autocovariância, multiplica-se a equação (2.7) por  $X_{t-k}$  e tomam-se as esperanças, originando

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}, \quad k \geq q + 1.$$

Dividindo esta ultima expressão por  $\gamma_0 = \sigma^2$ , obtém-se a seguinte expressão para a função de autocorrelação

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k \geq q + 1.$$

É de notar que a FAC dos processos ARMA(p,q) a partir de  $k=q+1$  decai gradualmente para zero, comportando-se da mesma forma que os processos autoregressivos. A FACP também apresenta um decaimento gradual para zero, uma vez que é majorado por uma soma de exponenciais e/ou sinusoidais amortecidas, comportando-se assim de um modo muito semelhante à FACP dos processos de médias móveis

Na tabela 2.1 apresenta-se as propriedades dos vários tipos de processos estocásticos estacionários lineares, podendo ser notadas as relações existentes entre os modelos, AR(p), MA(q) e ARMA(p,q).

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)
<b>Representação em termos dos valores anteriores de <math>X_t</math></b>	$\phi_p(B)X_t = \varepsilon_t$ Série finita em $X_t$	$[\theta_q(B)]^{-1} X_t = \varepsilon_t$ Série infinita em $X_t$	$[\theta_q(B)]^{-1} \phi_p(B)X_t = \varepsilon_t$ Série infinita em $X_t$
<b>Representação em termos dos valores anteriores de <math>\varepsilon_t</math></b>	$X_t = [\phi_p(B)]^{-1} \varepsilon_t$ Série infinita em $\varepsilon_t$	$X_t = \theta_q(B)\varepsilon_t$ Série finita em $\varepsilon_t$	$X_t = [\phi_p(B)]^{-1} \theta_q(B)\varepsilon_t$ Série infinita em $\varepsilon_t$
<b>Condições de estacionaridade</b>	Raízes de $\phi_p(B) = 0$ fora do círculo unitário	Sempre estacionário	Raízes de $\phi_p(B) = 0$ fora do círculo unitário
<b>Condições de invertibilidade</b>	Sempre invertíveis	Raízes de $\theta_q(B) = 0$ fora do círculo unitário	Raízes de $\theta_q(B) = 0$ fora do círculo unitário
<b>Função de Autocorrelação (FAC)</b>	Decaimento exponencial e sinusoidal para zero	Decaimento brusco para zero a partir de $k = q + 1$	Decaimento exponencial e sinusoidal para zero
<b>Função de Autocorrelação Parcial(FAC)</b>	Decaimento brusco para zero a partir de $k = p + 1$	Decaimento exponencial e sinusoidal para zero	Decaimento exponencial e sinusoidal para zero

Tabela 2.1: Comparação dos diferentes tipos de processos ARMA(p,q), adaptado de Murteira et al.[30]

## 2.4 Modelos Lineares para Séries Temporais não Estacionárias

Os modelos apresentados até ao momento são adequados para séries estacionárias, contudo na prática as séries são não estacionárias, como é o caso particular das séries económicas, sendo essa falta de estacionaridade causada sobretudo pela média e/ou variância. Para tornar a série estacionária recorre-se a transformações que estabilizem a média e/ou variância.

### 2.4.1 Transformações de Séries não estacionárias em Séries Estacionárias

#### *Não estacionaridade em média*

Seja  $X_t$  uma série temporal não estacionária em média. Para torná-la estacionária devem considerar-se diferenças, tantas vezes quantas forem necessárias para estabilizar a média. Considere-se então,  $\nabla$  o operador diferença em que

$$\begin{aligned}\nabla X_t &= X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t \\ \nabla^2 X_t &= \nabla(\nabla X_t) = (1 - B)^2 X_t = (1 - 2B + B^2)X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} \\ &\vdots \\ \nabla^d X_t &= (1 - B)^d X_t, \text{ com } d \geq 0.\end{aligned}$$

Normalmente,  $d$  toma os valores de 1 ou 2 que correspondem a dois casos comuns de não estacionaridade.

- Quando é necessário fazer apenas uma diferença para tornar a série estacionária, significa que se está perante uma *série não estacionária quanto ao nível*. A primeira diferença elimina uma tendência linear.
- Quando é necessário tomar duas diferenças, significa que se está perante uma *série não estacionária quanto à inclinação*. Estas séries oscilam numa direção durante

algum tempo e depois mudam para outra direção, Bezerra[5]. A segunda diferença pode eliminar uma tendência quadrática.

Por vezes, além de se verificar tendência, também se observa um comportamento sazonal, portanto, é importante ter-se em conta o operador de diferença sazonal,  $\nabla_S$ , dado por

$$\begin{aligned}\nabla_S X_t &= X_t - X_{t-S} = (1 - B^S)X_t \\ \nabla_S^2 X_t &= \nabla_S (\nabla_S X_t) = (1 - B^S)^2 X_t = (1 - 2B^S + B^{2S})X_t = X_t - 2X_{t-S} + X_{t-2S} \\ &\vdots \\ \nabla_S^D X_t &= (1 - B^S)^D X_t, \text{ com } D \geq 0, \text{ a ordem da diferenciação sazonal.}\end{aligned}$$

### ***Não estacionaridade em variância***

Muitas vezes observa-se um comportamento não linear nas observações, nesses casos podem ser úteis fazer transformações dos dados para estabilizar a variância. As transformações mais habituais são,  $\ln X_t$ ,  $\frac{1}{X_t}$ ,  $\sqrt{X_t}$  ou  $\frac{1}{\sqrt{X_t}}$ . Estas transformações são designadas por transformações Box-Cox.

Quando a não estacionaridade é devida simultaneamente à média e à variância, deve-se estabilizar em primeiro lugar a variância e só depois a média.

## **2.4.2 Modelos Integrados Mistos Não Sazonais e Sazonais**

Como foi referido anteriormente, muitos processos não estacionários podem converter-se em estacionários. A classe dos modelos ARIMA é a classe das séries temporais não estacionárias lineares, tais que a sua não estacionaridade é do tipo homogêneo, isto é, séries que podem ser transformadas em séries estacionárias por aplicação do operador diferença. No entanto, há uma generalização deste modelo que permite modelar séries com componente sazonal, como é o caso do modelo SARIMA.

## Modelo ARIMA (p,d,q)

**Definição 2.4.1** (Processo Integrado misto Autoregressivo e Médias Móveis). *Um processo  $X_t$  é um processo integrado misto autoregressivo de médias móveis de ordens  $p$ ,  $d$  e  $q$ , com  $p, d, q \in N$ , e escreve-se  $\{X_t : t \in Z\} \sim ARIMA(p, d, q)$ , se possuir representação da forma,*

$$\phi_p(B)(1-B)^d X_t = \alpha + \theta_q(B)\varepsilon_t, t \in Z \quad (2.8)$$

com  $\alpha$  real,  $\{\varepsilon_t : t \in Z\} \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , para algum  $\sigma_\varepsilon^2 \in [0, \infty[$  onde  $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$  e  $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$  são respetivamente os polinómios autoregressivos estacionário e médias móveis invertível sem raízes no círculo unitário e sem raízes comuns, Pires[36].

Portanto,  $X_t$  é um processo não estacionário que depois de diferenciado  $d$  vezes se transforma num processo estacionário e invertível ARMA( $p, q$ ). Também se pode dizer que  $X_t$  é um processo não estacionário ARMA ( $p+d, q$ ) da forma,

$$\xi_{p+d}(B)X_t = \alpha + \theta_q(B)\varepsilon_t$$

onde  $\xi_{p+d}(B) = \phi_p(B)(1-B)^d$  é um polinómio autorregressivo de ordem  $p+d$ , Murteira et al.[30].

Como se viu anteriormente, a exigência para que um processo ARMA (p,q) seja estacionário está descrita pela parte autoregressiva do modelo e portanto as raízes de  $\phi_p(B) = 0$  devem estar fora do círculo unitário. Se houver raízes desse polinómio que caíam dentro ou na fronteira do círculo unitário, o processo passa a ter um comportamento não estacionário.

Assim, uma série não estacionária homogénea de ordem  $d$ , possui  $d$  raízes da equação  $\phi_p(B) = 0$  sobre a fronteira do círculo unitário e as restantes fora dele. Já o polinómio de médias móvel invertido,  $\theta_q(B)$ , tem todas as suas raízes fora do círculo unitário.

Note-se que:

- Se  $d=0$ , o modelo ARIMA (p,0,q) representa o processo estacionário ARMA(p,q),

definido por (2.2).

- Se  $d \neq 0$ , então a série estacionária obtida após se terem efetuado  $d$  diferenças, pode ser descrita unicamente por um processo auto-regressivo,  $AR(p)$  e então o modelo  $ARIMA(p,d,0)$  torna-se num modelo Auto-Regressivo Integrado de ordem  $(p,d)$ , também denotado por  $ARI(p,d)$ . Esta série pode também ser descrita unicamente por um processo de média móvel,  $MA(q)$ , e neste caso o modelo  $ARIMA(0,d,q)$  torna-se num modelo Integrado Média Móvel de ordem  $(d,q)$ , também denotado por  $IMA(d,q)$ , Fisher[12].

### Processos $SARIMA(p,d,q) \times (P,D,Q)_S$

A maior parte das séries temporais presentes na Economia, apresentam um comportamento periódico de curto prazo (de um ano normalmente, mas pode ser trimestral, mensal,...) que se designa por sazonalidade.

Séries sazonais são séries que apresentam variações similares entre dois espaços de tempo, mostrando assim elevada correlação entre as observações distanciadas pelo período de sazonalidade além da existência de correlação entre observações próximas. Nelas, o padrão de sazonalidade tem comprimento constante. De forma a eliminar essa correlação existente entre os valores sazonais periodicamente desfasados, Box e Jenkins sugeriram a aplicação de um modelo  $ARIMA$  sazonal que permite modelar séries com componente sazonal, que se designa por modelo  $SARIMA(P,D,Q)_S$

Podem-se combinar os operadores sazonal e não sazonal resultando num modelo integrado autoregressivo de médias móveis sazonal multiplicativo, como seguidamente se define.

**Definição 2.4.2** (Processo Multiplicativo Integrado Sazonal Autoregressivo de Médias Móveis). *Seja  $X_t$  um processo integrado multiplicativo estritamente sazonal de período  $S$ , e escreve-se  $\{X_t : t \in Z\} \sim SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_S$ , se  $X_t$  possui uma representação da forma*

$$\Phi_P(B^S)\phi_p(B)(1-B^S)^D(1-B)^dX_t = \Theta_Q(B^S)\theta_q(B)\varepsilon_t, t \in Z$$

com  $\{\varepsilon_t : t \in Z\} \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , para algum  $\sigma_\varepsilon^2 \in [0, \infty[$  e com os polinómios

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \text{ e } \theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$$

$$\Phi_P(B^S) = 1 - \Phi_1 B^S - \Phi_2 B^{2S} - \dots - \Phi_P B^{PS} \text{ e}$$

$$\Theta_Q(B^S) = 1 - \Theta_1 B^S - \Theta_2 B^{2S} - \dots - \Theta_Q B^{QS}$$

sem raízes no círculo unitário e sem raízes comuns, Pires[36].

Este tipo de modelo não é fácil de usar devido ao número de parâmetros que é necessário identificar e estimar. Felizmente, os valores  $d$ ,  $D$ ,  $p$ ,  $P$ ,  $q$  e  $Q$  raramente ultrapassam o valor 2.



## Capítulo 3

# Modelação ARIMA - Método de Box e Jenkins

Para modelar séries não estacionárias, Box e Jenkins[6] propuseram uma metodologia baseada em 3 etapas que formam um ciclo iterativo. A primeira etapa é designada por *Identificação*, é nela que se identifica o modelo, isto é, que se procede à estacionarização da série, determinam-se  $p$ ,  $d$  e  $q$  e selecciona-se o modelo, no caso sazonal determina-se  $(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$ .

A segunda etapa é designada por *Estimação*. É nesta etapa que se estimam os parâmetros do modelo. Na terceira etapa, que se designa por *Verificação ou Avaliação do diagnóstico*, é verificado a qualidade do modelo, isto é, a adequação do modelo a nível estatístico e de ajustamento aos dados observados. Se esta avaliação não for satisfatória, volta-se a efetuar as etapas anteriores, caso contrário, procede-se à *Previsão*. Na Figura 3.1 apresenta-se um esquema que ilustra todo este processo.

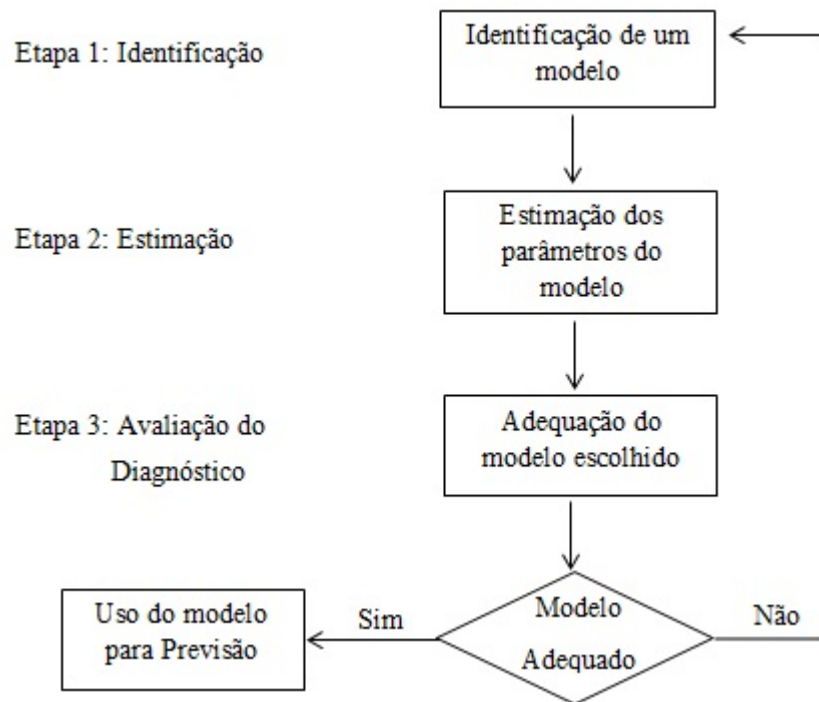


Figura 3.1: Etapas da metodologia apresentada por Box e Jenkins.

## 3.1 Identificação

Nesta etapa pretende-se escolher um modelo ARMA, ARIMA ou SARIMA que descreva a sucessão cronológica. Primeiramente deve estacionarizar-se a série, isto é, transformar a série não estacionaria numa serie estacionária, caso ela ainda não o seja. Assim obtém-se o valor de  $d$ , e de  $D, S$ , respetivamente, no caso das séries apresentarem sazonalidade. O segundo passo, é identificar os restantes valores através da representação das FAC e FACP.

### 3.1.1 Estacionarização da série ( $d$ , $D$ e $S$ )

Primeiramente, é necessário perceber se a série é ou não estacionária e para isso devem-se representar graficamente os dados e obterem-se a FAC e a FACP estimada.

Nos modelos não estacionários as funções de autocorrelação não tendem para zero, ou tendem de forma muito lenta. Se se verificar falta de estacionaridade em relação à média e à variância, após se estabilizar a variância com as transformações Box-Cox e se verificar a não estacionaridade da média, deve-se tomar  $d$  diferenças necessárias para que a série se torne estacionária,  $\nabla^d = (1 - B)^d$ . Normalmente  $d \leq 2$  é suficiente para se alcançar esse objetivo.

Caso a série apresente movimentos periódicos, deve aplicar-se o operador diferença sazonal de período  $S$  de ordem  $D$ , isto é,  $\nabla_S^D = (1 - B^S)^D$  afim de os eliminar. Em geral  $D = 1$ .

### 3.1.2 Identificação pelas FAC e FACP (p,P,q,Q)

Uma vez calculado  $d$ ,  $D$  e  $S$  é necessário obter os valores de  $p$ ,  $q$ ,  $P$  e  $Q$ . Como primeiramente se estacionarizou a série, a nova série obtida é estacionária e portanto o próximo passo é identificar o processo estacionário na nova série.

Como vimos anteriormente, existem três grandes classes de processos estacionários, AR, MA e ARMA, que têm características bem distintas em termos da FAC e da FACP. É com base nessas características, Tabela 3.1, que se determinam os valores de  $p$ ,  $q$ ,  $P$  e  $Q$ .

Assim, as ordens  $P$  e  $Q$  devem ser identificadas a partir da análise da FAC e FACP empíricas da série nas ordens múltiplas de  $S$ , “lags”,  $S$ ,  $2S$ ,  $3S, \dots$ , enquanto que as ordens  $p$  e  $q$  devem ser identificadas a partir da análise da FAC e FACP nas ordens  $1, 2, 3, \dots, S-1$ .

## 3.2 Estimação dos parâmetros

Após se identificar o modelo que melhor representa a série observada, é necessário estimar os parâmetros desconhecidos. Considere-se  $\{X_t, t \in Z\} \sim ARMA(p, q)$  dado pela

Processo	FAC( $\rho_k$ )	FACP( $\phi_{kk}$ )
AR(p)	Decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido para zero	$= 0, k > p$
MA(q)	$= 0, k > p$	Decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido para zero
ARMA(p,q)	Decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido para zero a partir da ordem q+1	Decaimento exponencial ou sinusoidal amortecido para zero a partir da ordem p+1

Tabela 3.1: Principais características das FAC e FACP dos processos estacionários não sazonais lineares.

equação (2.7) estacionário e considere-se, sem perda de generalidade, que  $\mu = 0$ . Nesta etapa deve obter-se, para este caso,  $p$  estimativas dos parâmetros,  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$ ,  $q$  estimativas dos parâmetros  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$  e a estimativa para a variância do ruído,  $\sigma_\varepsilon^2$ .

### 3.2.1 Método dos Momentos

Uma das técnicas usadas na estimação de parâmetros é o Método dos Momentos, que consiste em igualar os momentos amostrais aos momentos teóricos, resolver as equações resultantes e obter as estimativas dos parâmetros.

No modelo autoregressivo AR(p), as relações entre os parâmetros  $\phi_1, \phi_2, \dots$  e  $\phi_p$  e os vários momentos são dadas pelas equações de Yule-Walker (2.4). Para se obterem estimativas usando o método dos momentos basta substituir, nas relações de Yule-Walker, as autocorrelações teóricas  $\rho_k$  pelas estimadas  $\hat{\rho}_k$ , isto é,

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_1 &= \phi_1 + \phi_2 \hat{\rho}_1 + \dots + \phi_p \hat{\rho}_{p-1} \\
\hat{\rho}_2 &= \phi_1 \hat{\rho}_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \hat{\rho}_{p-2} \\
&\vdots \\
\hat{\rho}_p &= \phi_1 \hat{\rho}_{p-1} + \phi_2 \hat{\rho}_{p-2} + \dots + \phi_p.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Assim, basta resolver as equações (3.1) em ordem a  $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots, \hat{\rho}_p$  e obtém-se os chamados estimadores de Yule-Walker,  $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p$ .

Para os modelos de Médias Móveis, MA(q) e modelos mistos ARMA(p,q), o Método dos Momentos não é tão fácil de ser utilizado e muitas vezes nem se conseguem obter as estimativas. Além disso, prova-se que conduz normalmente a estimadores não eficientes, sendo por isso utilizado principalmente para a obtenção de estimativas iniciais de métodos iterativos de estimação mais eficientes.

### 3.2.2 Estimativas de Máxima Verosimilhança e de Mínimos Quadrados

O Método dos Momentos não é satisfatório para modelos com termos de médias móveis, necessitando-se por isso de outros métodos. Uma alternativa é o método de máxima verosimilhança, que vai ser aplicado se os resíduos,  $\varepsilon_t \sim RBN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ,  $t \in Z$ .

#### • Modelos $AR(p)$

Para modelos autorregressivos, como  $\varepsilon_t, t \in Z$  é uma sucessão de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição  $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  pode concluir-se que  $\{X_t, t \in Z\}$  é um processo Gaussiano e portanto pode provar-se por Priestley[38] que o logaritmo da verosimilhança é dado por

$$L(\phi_1, \dots, \phi_p) = -\frac{n}{2} \ln \sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{2} \ln |V_p| - \frac{S^*(\phi_1, \dots, \phi_p)}{2\sigma_\varepsilon^2}$$

onde  $n$  é o número de observações consideradas,  $V_p$  a matriz de covariâncias de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  e

$$S^*(\phi_1, \dots, \phi_p) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p v_{ij} X_i X_j + \sum_{t=p+1}^N (X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p})^2,$$

com  $v_{ij}$  elemento genérico de  $V_p$ , Murteira et al.[30].

Para se obterem os estimadores de máxima verosimilhança é necessário maximizar a função anterior, tendo por isso necessidade de resolver um sistema não linear de

equações.

Em geral, é complicado obter estimativas de máxima verosimilhança exatas e portanto consideram-se outros métodos que deem estimativas próximas destas, como é o caso do método de máxima verosimilhança condicional.

No método de máxima verosimilhança condicional, é necessário que os valores iniciais da série em estudo e da série de ruído branco associada sejam conhecidos e portanto considera-se o logaritmo da função de verosimilhança dado por

$$L(\phi_1, \dots, \phi_p) \approx \text{constante} - \frac{S(\phi_1, \dots, \phi_p)}{2\sigma_\varepsilon^2}$$

onde

$$S(\phi_1, \dots, \phi_p) = \sum_{t=p+1}^N (X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p})^2. \quad (3.2)$$

Sendo assim, para maximizar a função de log-verosimilhança, basta minimizar a equação (3.2).

Observe-se que os estimadores que se obtêm minimizando a equação (3.2), isto é, os estimadores de máxima verosimilhança condicionais, são os estimadores de mínimos quadrados e para  $n$  elevado, são os estimadores de Yule-Walker.

O estimador de máxima verosimilhança condicional de  $\sigma_\varepsilon^2$  é dado por

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{S(\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p)}{n - 2p}.$$

### • Modelos $MA(q)$

Para os modelos de médias móveis,  $MA(q)$ , o método dos momentos não conduz a estimadores eficientes, por outro lado, o método de máxima verosimilhança conduz-nos a equações não lineares de difícil resolução.

Considere-se então o método de máxima verosimilhança condicional, fixam-se os valores iniciais  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = \varepsilon_{-2} = \dots = \varepsilon_{-(q-1)} = 0$  e consideram-se as transformações

$$\begin{aligned} X_t &= \varepsilon_t \\ X_2 &= \varepsilon_2 - \theta_1 \varepsilon_1 \end{aligned}$$

...

$$X_q = \varepsilon_q - \theta_1 \varepsilon_{q-1} - \dots - \theta_{q-1} \varepsilon_1$$

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad q < t \leq N.$$

Então a função log-verossimilhança assume a forma

$$L(\theta_1, \dots, \theta_q) = \text{constante} - \frac{\sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2}{2\sigma_\varepsilon^2}.$$

Para se obter os estimadores de máxima verossimilhança condicionais, que coincidem também com os estimadores de mínimos quadrados condicionais, necessita-se de maximizar a função anterior e portanto minimizar

$$S(\theta_1, \dots, \theta_q) = \sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2.$$

O estimador de máxima verossimilhança condicional de  $\sigma_\varepsilon^2$  é dado por

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N} S(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q).$$

No entanto, em alternativa, é preferível considerar como estimador de máxima verossimilhança condicional de  $\sigma_\varepsilon^2$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N - q} S(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q).$$

### • Modelos **ARMA** ( $p, q$ )

Para os modelos mistos, ARMA( $p, q$ ), aplica-se o mesmo raciocínio efetuado anteriormente. Para se obterem os estimadores  $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_q$ , minimiza-se

$$S(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q) = \sum_{t=p+1}^N \varepsilon_t^2,$$

conduzindo a que o estimador de  $\sigma_\varepsilon^2$  assuma a forma

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N - 2p - q} S(\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q).$$

Normalmente nesta fase, é imprescindível o uso adequado de uma package informática que auxilie na obtenção destas estimativas.

- **Propriedades assintóticas dos estimadores**

Representando por  $\beta = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q) = (\beta_1, \dots, \beta_{p+q})$ , Brockwell e Davis[5] provaram que,

$$\hat{\beta}_i \sim N\left(\beta_i, \frac{v_{ii}^2(\beta)}{n}\right)$$

onde  $\hat{\beta}_i$  representa o estimador de máxima verosimilhança de  $\beta_i$  e  $v_{ii}^2(\beta)$  é o  $i$ -ésimo elemento da diagonal principal da matriz  $V(\beta)$ .

### 3.3 Avaliação do Diagnóstico do Modelo

Após a identificação do modelo e a estimação dos parâmetros, é importante verificar a adequação do modelo que se obteve no ajustamento dos dados observados. Caso se verifique inadequado, devem perceber-se as causas dessa inadequação e com base nelas voltar à fase de identificação de novos modelos.

A avaliação do diagnóstico do modelo baseia-se na Avaliação da qualidade estatística e na Avaliação da qualidade de ajustamento.

#### 3.3.1 Avaliação da qualidade estatística

Esta avaliação tem em conta, essencialmente, os seguintes aspetos:

- 1- Significância estatística do modelo
- 2- Estacionaridade e invertibilidade do modelo
- 3- Estabilidade do modelo estimado

##### 1- Significância estatística do modelo

Na prática, sabe-se que modelos parcimoniosos, levam a melhores previsões, portanto é importante eliminar os parâmetros que não se possam considerar significativamente diferentes de zero.



Com o intuito de eliminar do modelo ARMA(p,q), os parâmetros  $\beta_i$  que se consideram desnecessários, testa-se

$$H_0 : \beta_i=0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_i \neq 0.$$

Usando como estatística de teste

$$T_i = \frac{\hat{\beta}_i}{v_{ii}(\hat{\beta})/\sqrt{n}} \sim t_{n-p-q}$$

onde  $t_{n-p-q}$  representa a distribuição t-Student com  $n - p - q$  graus de liberdade, ao nível de significância  $\alpha$  rejeita-se a hipótese nula para  $|T_i| > t_{n-p-q, \frac{\alpha}{2}}$  onde  $t_{n-p-q, \frac{\alpha}{2}}$  representa o quantil de probabilidade  $1 - \frac{\alpha}{2}$  da distribuição  $t_{n-p-q}$ .

## 2- Estacionaridade e invertibilidade do modelo

De uma forma geral, numa série estacionária o respetivo cronograma revela uma tendência grosseiramente horizontal, com uma variabilidade constante, não tendo padrões a longo prazo. Por outro lado, através da análise do gráfico da FAC, existe um decaimento para zero relativamente depressa e o valor de  $\hat{\rho}(1)$  (autocorrelação amostral de desfasamento 1) não deverá ser elevado.

Como anteriormente se viu para que um modelo ARMA(p,q) seja estacionário e invertível as raízes dos polinómios autorregressivos e de médias móveis deverão de estar fora do círculo unitário. Sobre este problema da existência de raízes unitárias pode-se obter mais informação em Harvey[16].

Os testes aumentados de Dickey-Fuller (ADF - *Augmented Dickey-Fuller*) são designados por Testes de Raízes Unitárias e são muito úteis para determinar a ordem das diferenças que precisam de ser consideradas. No caso geral, a hipótese nula é que os dados não são estacionários e não são sazonais.

- **Teste de Dickey-Fuller:** caso de AR(1)

Dado o modelo

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2). \quad (3.3)$$

Rejeitar o teste

$$H_0 : \phi = 1 \quad vs \quad H_1 : \phi < 1$$

significa que se aceita a hipótese de estacionaridade.

O modelo (3.3) pode ser reformulado como

$$\begin{aligned} y_t - y_{t-1} &= \phi y_{t-1} - y_{t-1} + \varepsilon_t \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \Delta y_t = (\phi - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\Leftrightarrow \Delta y_t = \delta y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \delta = \phi - 1. \end{aligned}$$

Tem-se equivalentemente

$$H_0 : \delta = 0 \quad vs \quad H_1 : \delta < 0$$

com estatística de teste

$$T = \frac{\hat{\phi} - 1}{s_{\hat{\phi}}} = \frac{\hat{\delta}}{s_{\hat{\delta}}} \sim t_{n-1} \longrightarrow N(0, 1)$$

Facilmente se generaliza o teste para modelos AR(p).

- **Teste Ampliado de Dickey-Fuller (ADF):**

O teste Ampliado de Dickey e Fuller[8] é o mais aconselhado pois na construção tem em conta o número de defasamentos.

Este teste pode ser facilmente usado no R através da *package tseries* e do comando *adf.test()*.

A rejeição da hipótese nula é um indicador de que a série precisa de ser diferenciada.

Outro teste usado nesta dissertação é o teste KPSS.

- **Teste KPSS**

Este teste criado por Denis Kwiatkowski, Peter Phillips, Peter Schmidt e Yongcheol Shin é considerado na literatura mais robusto que o teste anterior. Tem por finalidade testar a estacionaridade de uma série temporal e considera para hipóteses do teste:

$$H_0: \text{Série estacionária} \quad vs \quad H_1: \text{Série apresenta raízes unitárias}$$

A estatística de teste considerada é

$$T = \sum_{t=1}^N \frac{S_t^2}{N^2 \hat{\sigma}_\varepsilon^2} \quad \text{onde } S_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i, \quad t = 1, 2, \dots, N.$$

Kwiatkowski et al.[24] mostra que a estatística de teste  $T$  tem uma distribuição que converge assintoticamente para um Movimento Browniano, cujos valores críticos estão tabelados. Note-se que as hipótese nula deste teste é igual há hipótese alternativa do teste ADF.

O teste KPSS pode ser facilmente usado informaticamente através da *package tseries* e do comando *kpss.test()*.

### 3- Estabilidade do modelo estimado

Para se verificar a estabilidade do modelo estimado, deve analisar-se a estimativa da matriz de correlações entre os estimadores dos parâmetros. Se dois estimadores estiverem fortemente correlacionados, isto é, a correlação em valor absoluto for superior a 0.7, significa uma má qualidade dos mesmos e como tal devem procurar-se modelos alternativos.

#### 3.3.2 Avaliação da qualidade de ajustamento

A avaliação da qualidade de ajustamento de um modelo é feita através da análise das estimativas dos erros  $\varepsilon_t$ , que num modelo ARMA(p,q) são estimados por

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\theta}^{-1}(B) \hat{\phi}(B) X_t, \quad t = 1, \dots, n$$

onde  $\hat{\theta}(B)$  e  $\hat{\phi}(B)$  representam os polinómios de média móvel e autorregressivo, respetivamente, com os parâmetros estimados.

Se o modelo se ajustar bem, a série dos resíduos padronizados  $\{\hat{\varepsilon}_t/\hat{s}_\varepsilon^2, t \in Z\}$ , deve ser uma sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas com o valor médio zero e variância unitária (Ruído Branco). Por outro lado, serão independentes se a distribuição também for normal. Esta condição é importante para se verificarem as expressões anteriormente obtidas para estimadores de máxima verosimilhança e correspondentes propriedades assintóticas assim como para a obtenção de intervalos de previsão. Portanto, nesta fase é crucial verificar se se pode admitir

$$1- \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2), t \in Z;$$

$$2- \{\varepsilon_t : t \in Z\} \text{ série de ruído branco através da análise dos resíduos}$$

estimados.

### **1- A série $\{\varepsilon_t : t \in Z\}$ tem distribuição normal**

Esta análise pode ser feita a partir do cronograma da série das estimativas dos resíduos padronizados  $\{\hat{\varepsilon}_t/s_\varepsilon^2\}$  e do Q-Q plot, permitindo visualizar os desvios da normalidade. Além desta análise pode-se verificar se a distribuição de probabilidade em questão pode ser aproximada pela distribuição Normal, através de testes de normalidade tais como, teste de Shapiro-Wilk e de Kolmogorov-Smirnov (sendo nos nossos exemplos mais indicado o último devido ao tamanho da amostra de que dispomos).

### **2- A série $\{\varepsilon_t : t \in Z\}$ é um ruído branco**

Através da propriedade assintótica da distribuição FAC amostral, conclui-se que as autocorrelações amostrais do processo de ruído branco são aproximadamente independentes e normalmente distribuídas, com valor médio nulo e variância  $1/n$ . Então a estrutura de correlação pode ser verificada pela representação gráfica de  $\hat{\rho}_\varepsilon(k)$  vs  $k$  e analisando se estão no intervalo de limites  $\pm 1,96/\sqrt{n}$ .

Adicionalmente, para se verificar se estamos na presença de um ruído branco é

necessário estudar o comportamento da FAC e FACP e verificar-se se  $\rho_k(\hat{\varepsilon}) = \phi_{kk}(\hat{\varepsilon}) = 0, \forall k \neq 0$ .

A avaliação desse comportamento nos resíduos pode ser feita com base em alguns testes, designados por testes de Portmanteau, tais como, o Teste de Box-Pierce e o Teste de Ljung-Box.

### **Teste de Box-Pierce**

Este teste aplicado à série dos resíduos estimados, testa a nulidade de  $m$  valores iniciais da FAC dos resíduos, e portanto considera-se a seguinte hipótese nula,

$$H_0 : \rho_1(\hat{\varepsilon}) = \rho_2(\hat{\varepsilon}) = \dots = \rho_m(\hat{\varepsilon}) = 0.$$

A estatística de teste considerada é

$$Q = n \sum_{k=1}^m \rho_k^2(\hat{\varepsilon}) \sim \chi_{m-p-q}^2.$$

Para valores elevados desta estatística, rejeita-se a hipótese nula e portanto o modelo estimado não será apropriado, uma vez que o processo dos resíduos não é RB. Hyndman et al.[21] sugere  $m=10$  para dados não sazonais e  $m=25$  para dados sazonais.

### **Teste de Ljung-Box.**

Ljung e Box [25], propuseram uma pequena alteração no teste Box-Pierce. As hipóteses do teste são iguais ao teste anterior e a estatística de teste é

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{1}{n-k} \rho_k^2(\hat{\varepsilon}) \sim \chi_{m-p-q}^2.$$

Este teste é mais aconselhável para pequenas amostras uma vez que a convergência da distribuição do  $X^2$  para a estatística de teste é mais rápida que a anterior.

## **3.4 Critérios de Seleção de Modelos**

Muitas vezes na fase de identificação não se consegue identificar um único modelo, ou ter a certeza absoluta que só aquele modelo é que descreve a série em estudo. Portanto

há necessidade de se considerar, na maior parte das séries temporais, vários modelos. Deste modo, pode haver mais do que um modelo que descreva de forma satisfatória as observações em estudo e portanto é necessário escolher-se o “melhor” modelo.

Para fazer-se essa escolha os critérios mais habituais são:

**AIC**: critério de informação de Akaike;

**BIC**: critério bayesiano de informação de Akaike.

Com estes critérios pretende-se obter o melhor modelo que satisfaça dois fatores desejáveis: verosimilhança elevada e reduzido número de parâmetros.

Em 1973, Akaike[1] sugere que a precisão possa ser medida por

$$\ln f(x|\hat{\alpha}) - m,$$

onde  $\hat{\alpha}$  é estimativa de máxima verosimilhança de  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  e  $f(x|\alpha)$  a função de verosimilhança.

Considerando  $m$  o número de parâmetros estimados ajustados a uma sucessão cronológica, o **AIC** é dado por

$$AIC = -2\ln(f(x|\hat{\alpha})) + 2m, \quad (3.4)$$

procurando-se o modelo com menor valor de  $AIC(m)$ , Pires[36].

Note-se que modelos com maior número de parâmetros têm normalmente verosimilhança mais elevada. No entanto, pretende-se encontrar um modelo simples (menor número de parâmetros), pelo que os modelos com elevado número de parâmetros devem ser penalizados, daí aparecer  $2m$  na expressão (4.1), Murteira et al.[30].

Em 1978, Schwartz[40] sugeriu a extensão bayesiana do critério AIC, denominada por **BIC**, definindo para um modelo com  $m$  parâmetros e  $n$  observações, a seguinte expressão

$$BIC = -2\ln(f(x|\hat{\alpha})) + m\ln(n).$$

Uma vez que o termo relativo à dimensão do modelo é superior no critério BIC do que no AIC quando a amostra é grande ou moderada, implica que este critério penaliza mais fortemente os modelos complexos.

### 3.5 Método de Previsão em Modelos ARIMA

O principal objetivo do estudo de séries temporais é a previsão de futuras observações. Nesta secção apresenta-se o método de previsão pontual apresentado por Box e Jenkins.

Considere-se a série  $\underline{X}_t = \{X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$ . Com base nesta sucessão cronológica, deseja-se prever o valor no momento  $t + m$ , isto é,  $X_{t+m}$ , em que  $t$  é a origem da previsão e  $m$  o horizonte de previsão. Denote-se por  $X_t(m)$  o preditor de  $X_{t+m}$ , em que  $X_t(m)$  é uma função dos valores observados da sucessão obtida através da minimização do erro quadrático médio, dado por

$$E [(X_{t+m} - X_t(m))^2].$$

**Teorema 3.5.1.** *Seja  $X_{t+m}, X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$  um conjunto de variáveis aleatórias e  $f(\cdot)$  uma função tal que,*

$$E [(X_{t+m} - f(X_t, X_{t-1}, \dots))^2] \tag{3.5}$$

*existe. Então o valor mínimo de (3.5) de entre todas as funções  $f(\cdot)$  é dado por,*

$$f(X_t, X_{t-1}, \dots) = E [X_{t+m} | X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots].$$

Usando o resultado anterior, tem-se que o melhor preditor de  $X_{t+m}$  em termos do erro quadrático médio é dado por

$$X_t(m) = E [X_{t+m} | X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots]$$

e o correspondente erro de previsão a  $m$  passos é dado por

$$e_t(m) = X_{t+m} - X_t(m) = X_{t+m} - E [X_{t+m} | \underline{X}_t].$$

### 3.5.1 Previsão em modelos Estacionários

Seja  $\{X_t : t \in Z\}$  um processo estacionário ARMA( $p, q$ ) na representação de médias móveis

$$X_t = \psi(B)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$$

com  $\psi_0 = 1$ .

Para este caso, tem-se como preditor de  $X_{t+m}$

$$X_t(m) = E[X_{t+m} | \underline{X}_t] = E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+m-j} | \underline{X}_t\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j E[\varepsilon_{t+m-j}].$$

Como

$$E[\varepsilon_{t+k} | \underline{X}_t] = \begin{cases} 0 & \text{se } k > 0 \\ \varepsilon_{t+k} & \text{se } k \leq 0 \end{cases}$$

pois quando  $k > 0$ ,  $\varepsilon_{t+k}$  é independente de  $\underline{X}_t$  e quando  $k \leq 0$ ,  $\varepsilon_{t+k}$  é uma função de  $\underline{X}_t$ , assim, o preditor é dado por

$$X_t(m) = \sum_{j=m}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t+m-j}.$$

O erro de previsão a  $m$  passos é dado por

$$e_t(m) = \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j \varepsilon_{t+m-j}$$

com

$$E[e_t(m)] = 0 \quad \text{e} \quad V[e_t(m)] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j^2.$$

### 3.5.2 Previsão em Modelos Não Estacionários

Seja  $\{X_t : t \in Z\}$  um processo ARIMA( $p, d, q$ ) que pode ser escrito como um ARMA( $p+d, q$ ) não estacionário cuja expressão é da forma

$$X_t = \psi_1^* X_{t-1} + \dots + \psi_{p+d}^* X_{t-p-d} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}.$$



Então para  $\forall m \geq 1$ , tem-se

$$X_{t+m} = \psi_1^* X_{t+m-1} + \dots + \psi_{p+d}^* X_{t+m-p-d} + \varepsilon_{t+m} - \theta_1 \varepsilon_{t+m-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t+m-q}$$

e portanto o preditor de  $X_{t+m}$  é dado por

$$X_t(m) = \psi_1^* E[X_{t+m-1}] + \dots + \psi_{p+d}^* E[X_{t+m-p-d}] + \\ E[\varepsilon_{t+m}] - \theta_1 E[\varepsilon_{t+m-1}] - \dots - \theta_q E[\varepsilon_{t+m-q}]$$

em que

$$E[\varepsilon_{t+k} | \underline{X}_t] = \begin{cases} 0 & \text{se } k > 0 \\ \varepsilon_{t+k} & \text{se } k \leq 0 \end{cases} \quad e \quad E[X_{t+k} | \underline{X}_t] = \begin{cases} X_t(k) & \text{se } k > 0 \\ X_{t+k} & \text{se } k \leq 0. \end{cases}$$

O processo de previsão para séries sazonais, por exemplo para um  $\text{SARIMA}(p, d, q)(P, D, Q)_S$ , é semelhante ao processo desenvolvido anteriormente para um  $\text{ARIMA}(p, d, q)$ . O primeiro procedimento é desenvolver o modelo de forma a obter a expressão em ordem à variável  $X_t$ , depois é necessário obter o valor para a variável no período  $t+m$ . Por último aplica-se a esperança condicionada à expressão de  $X_{t+m}$  e obtém-se a previsão a  $m$  passos para o modelo sazonal.

### 3.5.3 Previsão de Séries Transformadas

Como se viu na secção 3.1, muitas vezes as sucessões cronológicas apresentam uma grande variabilidade, ou seja, não apresentam estacionaridade em relação à variância e portanto Box e Jenkins[6], indicam a necessidade de se efetuar algumas transformações do tipo  $Y_t = f(X_t)$ , sendo  $X_t$  a série original e  $Y_t$  a série dos dados transformados.

Quando estas transformações são efetuadas, é a série dos dados transformados que deve ser modelada e conseqüentemente prevista, pelo que é necessário obter a previsão de  $X_t(m)$  em função de  $Y_t(m)$ . Esta tarefa pode não ser tão simples assim pois, mesmo que "f" admita inversa a previsão de  $X_t(m)$  pode não ser simplesmente

$$X_t(m) = f^{-1}(Y_t(m)),$$

como é o caso da transformação logaritmo, em que se considera  $Y_t = \ln(X_t)$ .

Neste caso, a previsão de  $X_t(m)$  não é dada por  $e^{Y_t(m)}$  uma vez que as previsões construídas desta forma não minimizam o correspondente erro quadrático médio. Em 1973, Nelson[31] admite que se os  $\varepsilon_t$  dos dados logaritmizados têm uma distribuição Normal  $Y_t$  também tem a mesma distribuição e portanto  $X_t$  tem uma distribuição Log-Normal que possui propriedades que lhe permitiu concluir que a previsão dos dados originais a  $m$  passos, está relacionada com os dados logaritmizados da seguinte forma,

$$X_t(m) = e^{Y_t(m) + \frac{1}{2}V[e_t(m)]}. \quad (3.6)$$

No entanto, estudo feito nesta dissertação, quando se faz a previsão para a sucessão original a partir da previsão obtida usando a sucessão logaritmizada, não se usa a equação (3.6), que teoricamente é a que minimiza o EQM. Na prática faz-se apenas  $X_t(m) = e^{Y_t(m)}$  pois obtêm-se valores de EQM muito menores do que usando a equação (3.6).

Para outras transformações pode ver-se em Pankratz e Dudley[32] como a previsão dos dados originais se relaciona com a previsão usando os dados transformados.

### 3.5.4 Critérios de comparação da qualidade de previsão

Evidentemente que a qualidade das previsões pontuais está relacionada com os erros de previsão, que devem ser não correlacionados e que deverão ter valor médio nulo para que as previsões não sejam enviesadas. No entanto, muitas vezes existem dúvidas na escolha do modelo que melhor modela a série temporal ou até efetuam-se diferentes métodos de previsão para a mesma série temporal.

Assim, é importante haver alguma forma de comparar os diferentes métodos de previsão e selecionar o modelo que melhor prevê, que não é necessariamente o que melhor modela. Para isso considera-se algumas medidas que avaliam a precisão das previsões  $m$  passos à frente, tais como

- **Erro quadrático médio:**

$$EQM = \frac{1}{N-k} \sum_{t=k}^{N-1} e_t(m)^2 \quad t = k, 2, \dots, N-1, \quad k \geq 1.$$

- **Erro absoluto médio:**

$$EAM = \frac{1}{N-k} \sum_{t=k}^{N-1} |e_t(m)| \quad t = k, 2, \dots, N-1, \quad k \geq 1.$$

- **Erro percentual absoluto médio:**

$$EPAM = \frac{1}{N-k} \sum_{t=k}^{N-1} \left| \frac{e_t(m)}{X_t} \right| \cdot 100 \quad t = k, 2, \dots, N-1, \quad k \geq 1.$$

O EQM e EAM dependem da escala, enquanto que o EPAM tem a vantagem de ser descrita independente da escala considerada, mas apresenta alguma sensibilidade se os valores da série forem muito elevados.

A avaliação da precisão das previsões deverá ser baseada numa amostra de teste, correspondendo a aproximadamente a 20% das observações disponíveis.

## 3.6 Intervalos de Previsão

Os intervalos de previsão podem ser obtidos usando a metodologia descrita empregada por Box e Jenkins para intervalos de previsão em modelos ARIMA. No entanto, este procedimento exige que a série dos resíduos,  $\{\varepsilon_t : t \in Z\}$ , tenha distribuição normal, o que muitas vezes não acontece. Além disso, os intervalos são altamente afetados pela variabilidade amostral dos coeficientes estimados, levando a intervalos de confiança com cobertura muito baixa.

Assim, em alternativa, apresenta-se o Método de Bootstrap para construir intervalos de previsão. Este método não paramétrico não necessita de assumir uma distribuição particular para os erros e, além disso, tem em conta a variabilidade presente na estimação dos parâmetros.

### 3.6.1 Intervalo de Previsão Assintótico

Na secção 3.3.2 viu-se que a série  $\{\varepsilon_t : t \in Z\} \sim RBN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Então pode afirmar-se que toda a distribuição dos erros de previsão e consequentemente, as futuras observações  $X_{t+h}$  terão também distribuição normal. Assim, pode-se concluir que  $e_t(m) = X_{t+m} - X_t(m)$  tem distribuição Normal e portanto

$$\frac{X_{t+m} - X_t(m)}{\sqrt{V[e_t(m)]}} \sim N(0, 1).$$

Fixando um determinado nível de confiança  $1 - \alpha$ , com  $0 < \alpha < 1$ , obtém-se

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{X_{t+m} - X_t(m)}{\sqrt{V[e_t(m)]}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

de outro modo

$$P\left(X_t(m) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V[e_t(m)]} < X_{t+m} < X_t(m) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V[e_t(m)]}\right) = 1 - \alpha.$$

Assim, obtém-se que o I.C a  $(1 - \alpha) \times 100\%$  para a previsão do valor futuro  $X_{t+m}$  é dado por

$$I.C = \left] X_t(m) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V[e_t(m)]}; X_t(m) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{V[e_t(m)]} \right[.$$

### 3.6.2 Intervalos de Previsão Bootstrap para Modelos ARIMA

O método de Bootstrap, proposto por Efron[9], é uma técnica de reamostragem bastante utilizada em diferentes situações estatísticas. A base deste método de Bootstrap é a obtenção de um “novo” conjunto de dados por reamostragem do conjunto de dados original. Pode afirmar-se que é um método de reamostragem computacionalmente intensivo e que auxilia em situações que falham certos pressupostos exigidos ou são analiticamente difíceis de examinar. Nesta relatório, iremos aplicar o método de Bootstrap para determinar intervalos de previsão para modelos ARIMA.

Os intervalos de previsão construídos na secção anterior dependem da suposição de normalidade dos resíduos e não têm em consideração a incerteza associada à estimação

dos parâmetros. Como o bootstrap é um procedimento não paramétrico, os intervalos de previsão obtidos usando este método já incorporam a variabilidade existente na estimação dos parâmetros e não assume qualquer distribuição particular para os erros.

O intervalo de confiança bootstrap mais usado é o obtido pelo método percentílico, mas também há outros procedimentos melhorados, como o bootstrap-t, descrito em Efron e Tibshirani[10]. Thombs e Schucany[43] e Pascual et al.[33], realizam o bootstrap nos resíduos do modelo autorregressivo ajustado e o intervalo percentílico. Em 2003, Kim[23] utiliza a mesma ideia, mas com um bootstrap com correção de vício nos coeficientes do modelo ajustado.

Entre 1990 e 1998, Masarotto[27] e Grigoletto[14] construíram intervalos assintóticos que não utilizam a distribuição gaussiana, estimando a função de distribuição da previsão a partir das replicas de bootstrap dos resíduos do modelo estimado.

Nesta relatório, o procedimento adotado é o bootstrap não paramétrico, obtido pela reamostragem dos resíduos do modelo ajustado. Seguiu-se o procedimento de Thombs e Schucany[43] e Pascual et al.[33], que introduziram um método de bootstrap baseado na estimação da função de distribuição de  $\mathbf{X}_{T+k}$  condicionada às observações disponíveis,  $\mathbf{X}_T$ , incorporando a variabilidade devida à estimação dos parâmetros.

Para incorporarem nos intervalos de previsão a incerteza decorrente da estimação dos parâmetros, geram réplicas de bootstrap  $\mathbf{x}_T^* = \{x_1^*, \dots, x_T^*\}$  que “imitam” a estrutura da série original. Uma vez que a previsão é condicionada às últimas  $p$  observações da série, todas as réplicas de bootstrap das futuras observações  $\mathbf{X}_{T+k}$  são geradas fixando os últimos  $p$  valores da série. No entanto, os parâmetros estimados neste processo não fixam nenhuma observação na amostra.

No modelo ARIMA(p,d,q), depois de se estimarem os parâmetros  $d$ ,  $\phi_i$  e  $\theta_j$  com  $i = 1, \dots, p$  e  $j = 1, \dots, q$ , conseguem-se obter os resíduos através da expressão

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\theta}^{-1}(B) \hat{\phi}(B) (1 - B)^{\hat{d}} X_t.$$

Estes resíduos têm de ser não correlacionados para que o modelo esteja corretamente

estimado e para que  $\widehat{F}_\varepsilon$ , função de distribuição empírica dos resíduos, seja uma boa estimativa para  $F_\varepsilon$ .

Depois de se centrarem os resíduos,  $\widehat{\varepsilon}_t^*$ , aplica-se a técnica de bootstrap não paramétrico, que consiste em reamostrar esses resíduos com reposição e construir uma série de bootstrap  $X_t^*$  através da expressão recursiva

$$X_t^* = \widehat{\phi}^{-1}(B) (1 - B)^{-d} \widehat{\theta}(B) \widehat{\varepsilon}_t^*.$$

Uma vez estimados os parâmetros desta série de bootstrap por  $\widehat{\phi}^* = (\widehat{\phi}_0^*, \widehat{\phi}_1^*, \dots, \widehat{\phi}_p^*)$  e  $\widehat{\theta}^* = (\widehat{\theta}_1^*, \dots, \widehat{\theta}_q^*)$ , estamos prontos para efetuar a previsão bootstrap  $k$  passos à frente. Como nesta dissertação apenas se aborda este método considerando o modelo ARIMA(p,1,q), considera-se por simplicidade de escrita da expressão recursiva, que  $d=1$ , e obtém-se a seguinte expressão para a previsão

$$X_{T+k}^* = \widehat{\phi}_0^* + \left(1 + \widehat{\phi}_1^*\right) X_{T+k-1}^* + \left(\widehat{\phi}_2^* - \widehat{\phi}_1^*\right) X_{T+k-2}^* + \dots + \left(\widehat{\phi}_p^* - \widehat{\phi}_{p-1}^*\right) X_{T+k-p}^* - \widehat{\phi}_p^* X_{T+k-p-1}^* + \widehat{\varepsilon}_{T+k}^* - \widehat{\theta}_1^* \widehat{\varepsilon}_{T+k-1}^* - \dots - \widehat{\theta}_q^* \widehat{\varepsilon}_{T+k-q}^*.$$

Assim, com esta expressão, determina-se o valor predito  $X_{T+k}^*$ , considerando as últimas  $p$  observações da série original e gerando  $\widehat{\varepsilon}_{T+k}^*$  através da função de distribuição  $\widehat{F}_\varepsilon$ .

Na prática, o procedimento consiste em repetir o processo de reamostragem, com reposição,  $B$  vezes e ordenar o conjunto de valores gerados  $\{X_{T+k}^{*(1)}, \dots, X_{T+k}^{*(B)}\}$ . Procedendo-se como sugeriram Efron e Tibshirani[10], os limites do intervalo de previsão são definidos como os quantis da função de distribuição bootstrap de  $X_{T+k}^*$  e portanto são dados por

$$\left[ X_{T+k}^{*(1-\alpha)/2}, X_{T+k}^{*(1+\alpha)/2} \right]$$

onde  $X_{T+k}^{*(1-\alpha)/2}$  e  $X_{T+k}^{*(1+\alpha)/2}$  são os percentis  $100 \times (1 - \alpha)/2$  e  $100 \times (1 + \alpha)/2$  de  $\{X_{T+k}^{*(1)}, \dots, X_{T+k}^{*(B)}\}$ .

Para se perceber melhor esta metodologia, especifica-se todo este procedimento para o modelo ARIMA(2,1,1), usado no capítulo 5 (Caso de Estudo), para prever o faturado

do perfil B 555, cujos resíduos não estão correlacionados, mas não têm distribuição normal.

**1ºPasso:** Calcular os resíduos  $\hat{\varepsilon}_t$ , a partir de

$$\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{\phi}_0 - (1 + \hat{\phi}_1)X_{t-1} - (\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_1)X_{t-2} + \hat{\phi}_2X_{t-3} + \hat{\theta}_1\varepsilon_{t-1}$$

sendo depois importante centrá-los e obter a série  $\hat{\varepsilon}_t^*$ .

**2ºPasso:** Reamostrar esses resíduos com reposição, de modo a que a série bootstrap  $X_t^*$  possa ser construída como

$$X_t^* = \hat{\phi}_0 + (1 + \hat{\phi}_1)X_{t-1}^* + (\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_1)X_{t-2}^* - \hat{\phi}_2X_{t-3}^* + \hat{\varepsilon}_t^* - \hat{\theta}_1\hat{\varepsilon}_{t-1}^*.$$

Com esta nova série  $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_T^*)$ , obtém-se novas estimativas  $(\hat{\phi}_0^*, \hat{\phi}_1^*, \hat{\phi}_2^*, \hat{\theta}_1^*)$ .

**3ºPasso:** Usando a expressão

$$X_{T+k}^* = \hat{\phi}_0^* + (1 + \hat{\phi}_1^*)X_{T+k-1}^* + (\hat{\phi}_2^* - \hat{\phi}_1^*)X_{T+k-2}^* - \hat{\phi}_2^*X_{T+k-3}^* + \hat{\varepsilon}_{T+k}^* - \hat{\theta}_1^*\hat{\varepsilon}_{T+k-1}^*,$$

determina-se o valor predito  $X_{T+k}^*$ , considerando as últimas p observações da série original e gerando  $\hat{\varepsilon}_{T+k}^*$  a partir da função de distribuição  $\hat{F}_\varepsilon$ , função de distribuição dos resíduos  $\hat{\varepsilon}_t^*$ .

**4ºPasso:** Repete-se o segundo e o terceiro passo  $B=1000$  vezes e obtém-se os valores bootstrap das previsões,  $\hat{X}_{T+k}^{*(1)}, \dots, \hat{X}_{T+k}^{*(B)}$ .

**5ºPasso:** Ordena-se a amostra obtida e determinam-se os quantis da função de distribuição bootstrap de  $\hat{X}_{T+k}^*$  e através da média aritmética da amostra obtém-se a previsão pontual.

Efetuando estes passos obtém-se previsões bootstrap, para a série logaritmizada do faturado do perfil B555. Mais à frente, são apresentados todos os resultados obtidos, (secção 5.4).





## Capítulo 4

# Modelos de Decomposição -Métodos de Alisamento Exponencial

No modelo de Previsão de Box e Jenkins, é necessário que o modelo satisfaça determinados pressupostos quer a nível da qualidade estatística quer da qualidade de ajustamento, referidas na Secção 3.3. Caso estas não se verifiquem, tem de se voltar a efetuar todo o processo identificado na Figura 3.1, de forma a se encontrar outro modelo que respeite todas essas condições. No entanto, todo este procedimento é bastante demorado e muitas das vezes torna-se até mesmo complicado obter um novo modelo que respeite essas condições.

Adicionalmente, quando o objetivo do problema é sobretudo fazer previsões e não modelar o conjunto das observações, terão de se procurar modelos mais adequados para este efeito e que não estejam dependentes das condições de estacionaridade e da gaussianidade dos resíduos.

Assim, torna-se imperioso considerar outros modelos/ métodos de previsão menos exigentes em termos de pressupostos e que sejam simples e rápidos computacional-

mente. Por isso, apresenta-se neste capítulo um novo método de previsão, os métodos de Alisamento Exponencial.

Os métodos de Alisamento Exponencial consideram que existe uma diminuição exponencial do peso dos dados à medida que estes se vão tornando mais antigos e além disso decompõe a série em componentes, tais como a tendência e a sazonalidade. Existem métodos diferentes que devem ser aplicadas a modelos diferentes, como o método de Alisamento Exponencial Simples, o método de Holt e o método de Holt-Winters com sazonalidade aditiva ou multiplicativa, os quais serão abordados no presente capítulo.

## 4.1 Classificação dos Métodos de Alisamento Exponencial

Segundo Hyndman e Athanasopoulos[19], Pitacas[37], Murteira et al.[30], os métodos de Alisamento Exponencial, designados por ETS (**E**xponen**T**ial **S**moothering), assumem que uma sucessão cronológica se estrutura em componentes como a tendência, a sazonalidade e o ruído branco. Representa-se por  $T_t$  a tendência da série ao longo do período de tempo  $t$ , e por  $S_t$  a sazonalidade da série ao longo desse período.

Estes modelos podem ser do tipo aditivo, isto é, as componentes simplesmente somam-se e não são interdependentes, formalizando-se pela expressão

$$X_t = T_t + S_t + \varepsilon_t,$$

e do tipo multiplicativo, em que as componentes se multiplicam e existe interdependência

$$X_t = T_t \times S_t \times \varepsilon_t.$$

A escolha entre modelos aditivos e multiplicativos, está relacionada com a natureza da tendência mas sobretudo com a sazonalidade. Quando a sucessão cronológica apresenta oscilações periódicas estáveis em termos da amplitude, pode-se dizer que se está

perante uma série com sazonalidade aditiva. No entanto, quando a amplitude dessas oscilações periódicas aumenta ou diminui ao longo do tempo, está-se perante uma série com sazonalidade multiplicativa.

Segundo Hyndman e Athanasopoulos[19], a tendência caracteriza-se por uma combinação da variável nível com uma variável crescimento, representadas respetivamente por  $l$  e  $b$ . Estas podem combinar-se dando origem a seis tipos de situações, denominadas por:

Sem Tendência:  $T_t = l$ .

Tendência Aditiva:  $T_t = l + b \times t$ .

Tendência Aditiva Amortecida:  $T_t = l + (\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^t)b$ .

Tendência Multiplicativa:  $T_t = lb^t$ .

Tendência Multiplicativa Amortecida:  $T_t = lb^{(\alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^t)}$ , com  $0 < \alpha < 1$  o parâmetro de amortecimento.

O primeiro e o segundo tipo de tendência referidos, são também conhecidos na literatura por Tendência localmente constante e por Tendência globalmente linear, respetivamente (Murteira et al.[30]). A primeira usa-se para modelar sucessões cronológicas cujos valores andam em torno de um nível fixo,  $l$ . O segundo usa-se quando há evidência de um crescimento ou decrescimento do nível proporcionalmente ao longo do tempo, verificando-se uma representação linear. Quando o crescimento ou decrescimento do nível não é constante ao longo do tempo, a tendência é representada de outra forma que não a linear, podendo ser representada de uma forma exponencial. As sucessões cronológicas que apresentam este tipo de representação, dizem-se que possuem uma Tendência multiplicativa. Na Figura 4.1 são apresentadas várias representações de sucessões cronológicas que descrevem estes tipos de comportamentos.

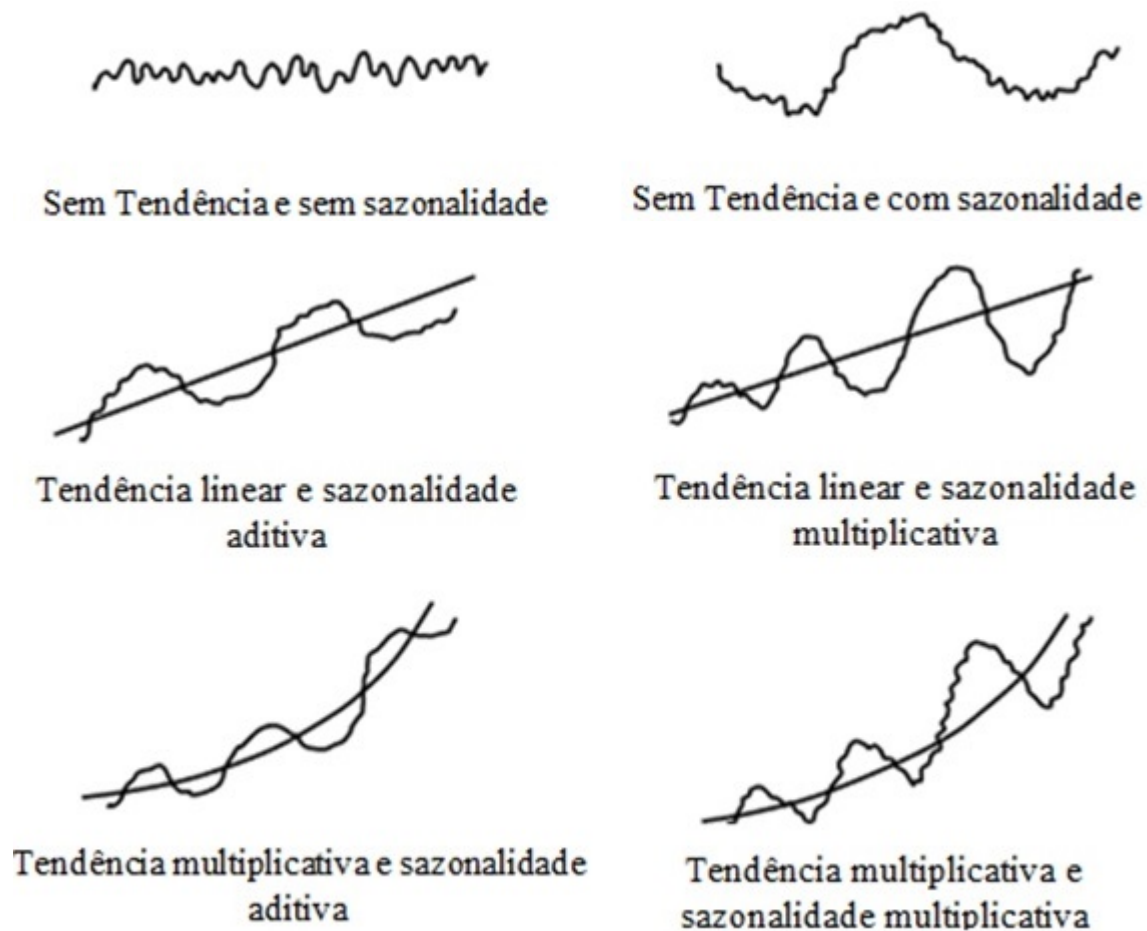


Figura 4.1: Sucessões cronológicas que contemplam os diferentes tipos de tendência e de sazonalidade.

A tendência amortecida é apropriada para séries temporais que apresentam uma dada tendência num espaço de tempo, mas que com o aumento do horizonte temporal vai sendo suavizada, isto é, amortecida tal como o nome indica.

Conjugando os tipos de tendência com o tipo de sazonalidade e ignorando a componente ruído branco, obtêm-se quinze métodos de alisamento exponencial possíveis, representados na Tabela 5.1.

Tipo de Tendência	Tipo de Sazonalidade		
	N(nenhum)	A (Aditivo)	M (Multiplicativo)
N(Nenhum)	N,N	N,A	N,M
A(Aditivo)	A,N	A,A	A,M
$A_d$ (Aditivo amortecido)	$A_d,N$	$A_d,A$	$A_d,M$
M (Multiplicativo)	M,N	M,A	M,M
$M_d$ (Multiplicativo amortecido)	$M_d,N$	$M_d,A$	$M_d,M$

Tabela 4.1: Modelos obtidos através da conjugação dos diferentes tipos de tendência e de sazonalidade- Métodos de Alisamento Exponencial.

Este tipo de classificação foi proposta inicialmente por Pegels[34], mais tarde Gardner[13] incluiu os métodos com tendência aditiva amortecida e Taylor[42] incluiu os métodos com tendência multiplicativa.

De todos esses métodos, os mais usados na previsão e mais conhecidos na literatura são os métodos vulgarmente designados por: método Alisamento Exponencial Simples (AES) que corresponde na Tabela 4.1 ao (N,N), ou seja, modelo sem tendência e sem sazonalidade; método linear de Holt que corresponde ao (A,N) e método de Holt-Winters aditivo e multiplicativo que correspondem respetivamente a (A,A) e a (A,M). Na presente dissertação serão apenas abordados estes métodos (secções 4.2, 4.3 e 4.4). No entanto, na Tabela A.1 do Apêndice B apresentam-se as equações, escritas na forma de componentes, de todos os modelos de alisamento exponencial.

## 4.2 Alisamento Exponencial Simples (N,N)

O método mais simples é designado por método de Alisamento Exponencial Simples (AES). Este método é usado para previsão de sucessões cronológicas que não apresentem sazonalidade nem tendência, pelo que este é dado somente pelo nível.

Designa-se por  $X_t(1)$  a previsão a um passo, isto é, a previsão para o instante  $t+1$ ,

$X_t$  o valor real observado no instante  $t$  e  $X_{t-1}(1)$  a previsão obtida do instante  $t$ . O método de Alisamento Exponencial Simples admite a previsão do instante anterior e ajusta-o usando o erro de previsão, ou seja, para se obter a nova previsão, considera-se a previsão anterior adicionada com o ajustamento do erro associada à previsão, representando-se por

$$X_t(1) = X_{t-1}(1) + \alpha (X_t - X_{t-1}(1)) \quad (4.1)$$

onde  $(X_t - X_{t-1}(1))$  representa o erro de previsão ocorrido no instante  $t$  e  $\alpha$  o parâmetro de alisamento limitado pelos valores 0 e 1. Como se pode observar, para valores de  $\alpha$  próximos de 0 o ajustamento do erro é muito pequeno e além disso o peso dado às últimas observações também é quase nulo, tornando a previsão mais insensível a qualquer alteração drástica do meio envolvente. Se por outro lado o valor de  $\alpha$  for próximo de 1, os pesos decrescem rapidamente dando-se importância apenas às observações mais recentes. Na prática o valor de  $\alpha$  é obtido utilizando meios informáticos que tem por base a minimização do EQM relativo às observações disponíveis.

A equação (4.1) pode ser escrita de uma forma mais usual

$$X_t(1) = \alpha X_t + (1 - \alpha)X_{t-1}(1).$$

Se nesta igualdade for substituído recursivamente o valor de  $X_{t-1}(1)$  obtém-se

$$X_t(1) = \alpha X_t + \alpha(1 - \alpha)X_{t-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 X_{t-2} + \dots + \alpha(1 - \alpha)^{t-1} X_1 + \alpha(1 - \alpha)^t \hat{X}_0$$

onde  $\hat{X}_0$  representa uma estimativa inicial, obtida a partir da média de um certo conjunto inicial de observações.

Observe-se que a previsão é uma média ponderada das observações passadas, com pesos exponencialmente decrescentes com a duração da informação e portanto a partir de um certo período, o peso atribuído a essas observações é muito pequeno. Assim, uma vantagem deste método é o facto de não ser necessário armazenar os valores de observações muito antigas.

Uma outra representação alternativa para a previsão AES é a forma de componente. Nesta representação não temos a componente tendência, representada por  $b_t$  nem a componente sazonal, representada por  $s_t$ , existindo apenas a componente nível da série  $l_t$ .

As representações em forma de componente dos métodos de Alisamento Exponencial incluem uma equação da previsão e uma equação do alisamento para cada uma das componentes existentes no modelo.

A representação na forma de componente do método de AES é definida por

$$\begin{aligned}\text{Nível :} \quad & l_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)l_{t-1} \\ \text{Previsão:} \quad & X_t(1) = l_t\end{aligned}$$

para  $t = 1, 2, \dots, T$ . Para iniciar o processo admite-se  $l_0 = x_1$ .

Anteriormente apresentou-se a equação de previsão para um passo à frente. Como o método de Alisamento Exponencial Simples é adequado para séries temporais que não têm tendência nem componente sazonal, a função de previsão é constante para longos horizontes temporais, ou seja,  $X_t(m) = X_t(1) = l_t$  para  $m = 2, 3, \dots$

### 4.3 Método Linear de Holt (A,N)

Em 1957, Holt[17] estendeu o método de Alisamento Exponencial Simples para dados com tendência linear, criando o método Linear de Holt ou simplesmente designado por método de Holt, que envolve na previsão duas equações, sendo uma referente ao nível  $l_t$  e outra referente à tendência  $b_t$ , com parâmetros de alisamento  $\alpha$  e  $\beta$ , respetivamente, obtidos através da minimização do EQM.

$$\begin{aligned}\text{Nível :} \quad & l_t = \alpha X_t + (1 - \alpha) (l_{t-1} + b_{t-1}) \\ \text{Tendência :} \quad & b_t = \beta (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \\ \text{Previsão:} \quad & X_t(m) = l_t + b_t m\end{aligned}$$

para  $t = 1, 2, \dots, T$ ,  $l_t$  representa a estimativa do nível no instante  $t$ ,  $b_t$  a estimativa da tendência de uma série no instante  $t$  e  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ . Os valores iniciais são dados por  $l_0 = x_1$  e  $b_0 = x_2 - x_1$

A função de previsão  $m$  passos à frente é dada pelo última estimativa do nível mais  $m$  vezes o último valor da estimativa da tendência. Daí as previsões serem uma função linear.

## 4.4 Método de Holt-Winters

Holt[17] e Winters[45], estenderam o método de Holt para séries temporais que além de apresentarem tendência, apresentam também sazonalidade, originando o Método de Holt-Winter. Assim, este método envolve na previsão três equações de alisamento, uma referente ao nível  $l_t$ , outra à tendência  $b_t$  e outra à sazonalidade  $s_t$ . Consequentemente, o método envolve três constantes de alisamento  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  nas respectivas equações de alisamento.

Este método apresenta duas variantes que diferem na natureza da componente sazonal, havendo assim o Método aditivo de Holt-Winter e o Método multiplicativo de Holt-Winter.

### 4.4.1 Método Multiplicativo de Holt-Winter (A,M)

Este método é usado quando as variações sazonais variam proporcionalmente com o nível da série temporal e baseia-se nas seguintes expressões para estimar a previsão:

$$\text{Nível :} \quad l_t = \alpha \frac{X_t}{s_{t-p}} + (1 - \alpha) (l_{t-1} + b_{t-1}) \quad (4.2)$$

$$\text{Tendência :} \quad b_t = \beta (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta) b_{t-1} \quad (4.3)$$

$$\text{Sazonalidade:} \quad s_t = \gamma \frac{X_t}{l_t} + (1 - \gamma) s_{t-p} \quad (4.4)$$

$$\text{Previsão:} \quad X_t(m) = (l_t + b_t m) s_{t-p+m_p^+} \quad (4.5)$$



onde  $p$  representa o período de sazonalidade, isto é o número de meses ou trimestres num ano. Por exemplo, para dados trimestrais  $p=4$ , para dados mensais,  $p=12$  e  $m_p^+ = \lfloor (m-1) \bmod p \rfloor + 1$ . Os valores iniciais são dados por  $l_0 = \frac{1}{p}(x_1 + \dots + x_p)$ ,  $b_0 = \frac{1}{p} \left( \frac{x_{p+1} - x_1}{p} + \dots + \frac{x_{p+p} - x_p}{p} \right)$  e  $s_0 = x_p/l_0, s_{-1} = x_{p-1}/l_0, \dots, s_{-p+1} = x_1/l_0$ , Hyndman e Athanasopoulos[19].

#### 4.4.2 Método Aditivo de Holt-Winter (A,A)

Este método é preferido quando as variações sazonais são mais ou menos constantes ao longo da série temporal e assim a previsão é dada da seguinte forma:

$$\text{Nível :} \quad l_t = \alpha (X_t - s_{t-p}) + (1 - \alpha) (l_{t-1} + b_{t-1}) \quad (4.6)$$

$$\text{Tendência :} \quad b_t = \beta (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \quad (4.7)$$

$$\text{Sazonalidade:} \quad s_t = \gamma (X_t - l_t) + (1 - \gamma)s_{t-p} \quad (4.8)$$

$$\text{Previsão:} \quad X_t(m) = l_t + b_tm + s_{t-p+m_p^+} \quad (4.9)$$

onde os valores iniciais são dados por  $l_0 = \frac{1}{p}(x_1 + \dots + x_p)$ ,  $b_0 = \frac{1}{p} \left( \frac{x_{p+1} - x_1}{p} + \dots + \frac{x_{p+p} - x_p}{p} \right)$  e  $s_0 = x_p - l_0, s_{-1} = x_{p-1} - l_0, \dots, s_{-p+1} = x_1 - l_0$ , Hyndman et. al.[21].

As principais diferenças entre as equações do método de Holt-Winter multiplicativo e aditivo são relativas aos índices sazonais que em vez de serem multiplicados, são agora somados ou subtraídos. Por exemplo, na equação (4.6), à observação  $X_t$  é subtraído o índice sazonal, estimado  $p$  instantes atrás com o objetivo de se retirar a sazonalidade existente nessa observação. Esta equação mostra que o nível é definido pela média ponderada entre a observação ajustada sazonalmente e a previsão não sazonal.

A equação (4.7) é igual à equação (4.3) do método multiplicativo, uma vez que a diferença dos dois métodos está na componente sazonal e não na componente tendência. Também a equação de tendência do método Linear de Holt é igual a estas, uma vez que o método de Holt-Winter acrescenta a componente sazonal ao método Linear de Holt.

Na equação (4.8) o índice sazonal referente ao instante  $t$ , que foi estimado pela ultima vez  $p$  instantes atrás, é atualizado com o efeito sazonal do instante  $t$ , estimado a partir da diferença entre a observação e o nível nesse instante.

## 4.5 Modelo de espaço de estados, ETS

O estudo de modelos de espaço de estados iniciou-se em 1960, por Kalman e Bucy[22], cujo o trabalho descreve um processo recursivo para soluções de problemas lineares relacionados com dados discretos.

Nesta dissertação, será utilizada a formulação proposta por Hyndman et al.[21] que é baseada nos trabalhos de Anderson e Moore[2], Aoki[3], Hannan e Deistler[15].

Nesta secção, pretendem-se definir modelos estatísticos que têm por base os modelos de Alisamento Exponencial e que para além de gerarem as mesmas previsões pontuais, geram também intervalos de previsão.

Estes modelos de espaço de estados têm uma equação das observações que descreve os dados (parte observável), e uma ou mais equações de estados que descrevem as componentes, nível, tendência e sazonalidade ao longo do tempo, (estados não observáveis).

Na secção anterior viu-se que conjugando os tipos de tendência e de sazonalidade se obtinham 15 modelos. Nos modelos de espaço de estados, além de se considerar a tendência e a sazonalidade, consideram-se os erros, que podem ser aditivos ou multiplicativos. Assim, os modelos de espaço de estados são identificados por um terno de letras (E,T,S) em que E especifica a componente erro, cujas possibilidades são A de aditivos e M de multiplicativos. A letra T especifica a tendência cujas possibilidades são N, A,  $A_d$ , M,  $M_d$  e a letra S especifica a sazonalidade, cujas possibilidades são N, A, M.

Conjugando todos os tipos de componentes, existem 30 modelos de espaço de estados, 15 com erros aditivos e outros 15 com erros multiplicativos. De seguida só se deduzem as equações do modelo ETS(A,N,N) e do modelo ETS(M,N,N), modelos

de Espaço de Estados com erros aditivos e multiplicativos, sucessivamente, mas sem tendência e sem sazonalidade e portanto têm subjacente o método de AES.

• **Modelo ETS(A,N,N)**- Modelo de Alisamento Exponencial

Tendo em conta que  $X_t(1) = l_t$ , que  $X_{t-1}(1) = l_{t-1}$ , que  $X_t - X_{t-1}(1) = e_t$  e ainda a equação (4.1) tem-se que

$$l_t = l_{t-1} + \alpha e_t.$$

Como  $e_t = X_t - X_{t-1}(1)$  representa o erro de previsão a um passo, pode definir-se que

$$X_t = l_{t-1} + e_t.$$

Para especificar o modelo espaço de estados, basta ainda considerar que os erros de previsão a um passo,  $e_t = \varepsilon_t$ , têm de ser um ruído branco com distribuição normal de média zero e variância  $\sigma_\varepsilon^2$ , Hyndman e Athanasopoulos[19]. Assim, o modelo de espaço de estados de AES com erros aditivos, ETS(A,N,N), pode ser definido da seguinte forma:

$$\text{Equação das observações:} \quad X_t = l_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\text{Equação de estado:} \quad l_t = l_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$$

com  $\varepsilon_t \sim RBN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

A equação das observações mostra a relação linear existente entre a observação  $X_t$ , que é a parte observável, o nível  $l_{t-1}$  e o erro aleatório  $\varepsilon_t$  que é a parte não observável. Para outros modelos de Espaço de Estados a relação pode não ser linear.

Na equação de estado pode-se observar que tal como acontecia nos modelos de Alisamento Exponencial, o parâmetro de alisamento  $\alpha$  controla o grau de variação dos sucessivos níveis. Portanto, quanto menor for o valor de  $\alpha$  mais lentas são as mudanças de nível e quanto maior for esse valor mais rápidas são essas mudanças.

Pelo exposto, conclui-se que o modelo de alisamento exponencial pode ser definido pelas equações anteriores, estando na forma de espaço de estados como equivalente-mente se pode escrever na forma de componentes, tais como:

$$\begin{aligned}\text{Equação do nível:} \quad & l_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)l_{t-1} \\ \text{Equação de previsão:} \quad & X_t(1) = l_t.\end{aligned}$$

Todos os modelos ETS definidos na forma de componentes e descritos na Tabela 2 do Apêndice B, podem ser escritos na forma de espaço de estados, correspondendo à situação de os erros serem aditivos. A Tabela 2 do Apêndice B mostra esta representação equivalente, na forma de espaço de estados, necessariamente com erros aditivos.

#### • Modelo ETS(M,N,N)

Analogamente, pode-se definir o modelo ETS(M,N,N), isto é, o modelo de Espaço de Estados sem tendência, sem sazonalidade e com erros multiplicativos. Neste modelo consideram-se os erros de previsão aleatórios a um passo como erros relativos, Hyndman et al.[21]. Sendo assim

$$\varepsilon_t = \frac{X_t - X_{t-1}(1)}{X_{t-1}(1)} \quad (4.10)$$

com  $\varepsilon_t \sim RBN(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Tendo em conta que  $X_{t-1}(1) = l_{t-1}$  e ainda a equação (4.10) obtém-se como equação de medida  $X_t = l_{t-1} + l_{t-1}\varepsilon_t$ .

Por outro lado tem-se que  $e_t = X_t - X_{t-1}(1)$  logo, usando a equação (4.10), obtém-se que  $e_t = l_{t-1}\varepsilon_t$ . Substituindo a expressão anterior na equação (4.1) obtém-se a equação de estado  $l_t = l_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$ .

Assim, o modelo de Espaço de Estados de AES com erros multiplicativos, ETS(M,N,N), pode ser definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\text{Equação de observação:} \quad & X_t = l_{t-1}(1 + \varepsilon_t) \\ \text{Equação de estado:} \quad & l_t = l_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)\end{aligned}$$

com  $\varepsilon_t \sim RBN(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

Como se afirmou anteriormente, conjugando todos os tipos de componentes, existem 30 modelos de espaço de estados, 15 com erros aditivos e outros 15 com erros multiplicativos. De forma análoga podem-se obter as equações dos restantes modelos de espaço de estados. Na Tabela 2 e na Tabela 3 do Apêndice B apresentam-se as equações de todos os modelos de espaço de estados com erros aditivos e com erros multiplicativos, respetivamente.

Os parâmetros de amortecimento  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\phi$  e os estados iniciais  $l_0$ ,  $b_0$ ,  $s_0$ ,  $s_{-1}$ ,  $\dots$ ,  $s_{-m+1}$ , são habitualmente estimados através de um “software” de previsão que os obtém minimizando o EQM.

## 4.6 Considerações sobre modelos ETS - Métodos de Alisamento Exponencial vs Modelos de Espaço de Estados

Os métodos ETS apenas permitem fazer previsões pontuais e todos podem ser escritos na forma de espaço de estados com inovações.

A vantagem da escrita do modelo na forma de espaço de estados é pelo facto de se poderem calcular também intervalos de previsão.

As versões aditiva e multiplicativa no modelo de espaço de estados conduzem à mesma previsão pontual mas a intervalos de previsão distintos.

De uma forma geral, modelos com erros multiplicativos são mais úteis quando se usam dados estritamente positivos. No caso de os dados conterem zeros ou valores negativos, devem ser usados os modelos aditivos ( $ANN$ ,  $ANA$ ,  $AAN$ ,  $AAA$ ,  $AA_dN$ ,  $AA_dA$ ) uma vez que os anteriores são numericamente instáveis.

No R, explicita-se o modelo de espaço de estados pela designação correspondente  $ets(dados, model = “ZZZ”)$ .



# Capítulo 5

## Caso de Estudo

Neste capítulo apresenta-se uma breve descrição da empresa onde foi realizado o estágio curricular. Seguidamente, descreve-se o problema por ela proposto, bem como todas as metodologias usadas para a resolução do problema.

Para a obtenção dos resultados usou-se o software R num computador Intel(R) Pentium(R)Dual CPU T2330, 1.60GHz e 2.00GB de RAM.

### 5.1 Apresentação da Empresa Extrusal e Descrição do Problema Proposto

A Extrusal é uma empresa de extrusão e tratamento de perfis de alumínio, com localização em Aveiro, que surgiu no mercado português em 1972.

O alumínio é o mineral de eleição do grupo Extrusal pois as suas características transformam-no numa matéria-prima com variadíssima aplicabilidade na arquitetura e na indústria em geral. A consciencialização para as questões ambientais é uma grande preocupação da Extrusal, que desde 1982, com a construção de uma ETARI para tratamento das suas águas, até aos dias de hoje tem tido sempre presente o respeito pelo meio ambiente.

De referir ainda que em 1997 a Extrusal foi a primeira empresa portuguesa, e uma das únicas na Europa, a obter certificação do sistema de gestão da qualidade global - NP EN ISO 9002 - nas áreas de fabricação de matrizes, extrusão, anodização e termolacagem.

A Extrusal ambiciona a conceção de soluções inovadoras, robustas e tecnologicamente avançadas para a arquitetura e para a indústria em geral, correspondendo sempre às necessidades dos seus clientes. Por outro lado, pretende proporcionar aos seus acionistas os retornos desejados, assegurando desta forma a continuidade e o crescimento da empresa.

Para obter esses retornos, a Extrusal tenta minimizar ao máximo todos os desperdícios existentes na extrusão do alumínio bem como otimizar todo o processo de produção dos seus perfis. Para isso, necessita de obter uma metodologia que preveja o que irá ser vendido no futuro.

A Extrusal, produz perfis e peças finais para a indústria em geral, mediante projetos requeridos pelos clientes - Produtos de Cliente, representados pela letra C. Além disso os clientes da Extrusal podem optar por escolher um perfil em alumínio já pré-concebido, dos quais são exemplos os produtos de caixilharia, que representam grande parte das vendas da Extrusal.

Assim, interessa à Extrusal obter uma metodologia de previsão de vendas para os produtos de caixilharia, que englobam mais de 1732 perfis de alumínio.

Nestes produtos, distinguem-se os perfis de abrir, representados pela letra A e os perfis de correr, representados pela letra B.

Destes, foram escolhidos 12 perfis representativos, sendo que após a obtenção da previsão do faturado em quilogramas nos próximos meses, se obtém facilmente, por proporção, os valores do faturado em quilogramas para os restantes perfis.

Dos 12 perfis considerados, nem todos têm um histórico grande para se efetuar o estudo, então considera-se para sete deles, dados mensais e para cinco deles, dados



semanais.

As séries com dados mensais, têm dados desde Janeiro de 2004, enquanto que as séries semanais, são séries de perfis de alumínio recentes no mercado e que só começaram a ser faturados em Janeiro de 2012.

Neste relatório de estágio só são consideradas séries cujo faturado em quilogramas é mensal. Assim, para estas considera-se como amostra de treino, o faturado desde Janeiro de 2004 até Dezembro de 2014, que constitui uma série temporal com 132 observações. Para amostra de teste consideram-se as observações até Julho de 2015.

Normalmente a amostra de treino são  $2/3$  das observações e a de teste apenas  $1/3$ . Neste caso, considera-se para amostra de treino mais do que  $2/3$  das observações, porque o número de observações que se tem são relativamente reduzidas.

Nesta dissertação apenas se apresenta o estudo e a análise do faturado de três perfis, o perfil A 080, A 333 e B 555. Para os dois primeiros perfis, tentam-se modelar as séries por modelos ARIMA, usando a metodologia de Box e Jenkins, e por modelos de Alisamento Exponencial. Além destes, tenta-se encontrar uma modelação automática para os modelos ARIMA e uma modelação automática para os modelos de Alisamentos Exponencial, através de modelos ETS, implementados no pacote R.

Quer os modelos encontrados através da metodologia de Box e Jenkins, quer os modelos de Alisamentos Exponencial são obtidos através da análise de séries temporais num determinado intervalo de tempo e como tal, os modelos definidos estarão aptos até uns certos anos, supondo situação estável em termos temporais. Portanto, interessa à empresa conseguir modelos que sejam obtidos através de uma metodologia muito simples e que qualquer funcionário, que não tenha qualquer formação na área em questão, consiga obter. Desta forma, interessam à empresa, modelos obtidos de uma forma automática.

Assim, tenta-se, através da análise do faturado do perfil B 555, dar ênfase à modelação automática de modelos ARIMA, bem como dar uma alternativa quando o modelo automático não cumpre alguns pressupostos necessários para se efetuar a previsão com

esse modelo. Portanto, quando o modelo automático obtido não apresenta distribuição normal, apresenta-se na secção 5.4 um algoritmo, que utiliza o método de bootstrap, para se conseguir obter as previsões com esse modelo.

## 5.2 Perfil A 080

### 5.2.1 Metodologia Box e Jenkins para a série do faturado do perfil A 080

#### Etapa de Identificação

A amostra de treino da série do faturado do perfil A080 é composta por 132 observações mensais, que vão desde janeiro de 2004 até dezembro de 2014 sendo o horizonte de previsão de 7 meses. Na Figura 5.1 apresenta-se o gráfico do seu faturado,  $X_t$ .

Como se pode observar na Figura 5.1, a sucessão não apresenta estacionaridade quanto à variância, isto é, apresenta bastante variabilidade,  $\sigma_X^2 = 514524,7$ , e portanto é necessário estabilizar a série através das transformações Box-Cox. No entanto, a série apresenta estacionaridade quanto à média, que se verifica uma vez que a sucessão não apresenta nenhuma tendência, apresentando as oscilações em torno de um nível, aproximadamente,  $\mu_X = 907,9256$ . Na Figura 5.2 e na Figura 5.3 apresenta-se, respetivamente, o cronograma da sucessão transformada,  $Y_t = \ln(X_t)$ , e os correlogramas da série transformada.

Note-se que se procedeu à logaritmização dos dados a fim de se estabilizar a variância e, como se pode ver quer pelo cronograma da série transformada, quer pelas FAC e FACP estimadas de  $Y_t = \ln X_t$ , a sucessão transformada continua a ser estacionária quanto à media, apresentando as oscilações em torno de  $\mu_{\ln X} = 6,5259$  e portanto não é necessário proceder-se à diferenciação.

Para confirmar este facto, realiza-se o teste de Dickey Fuller (ADF) e o teste de

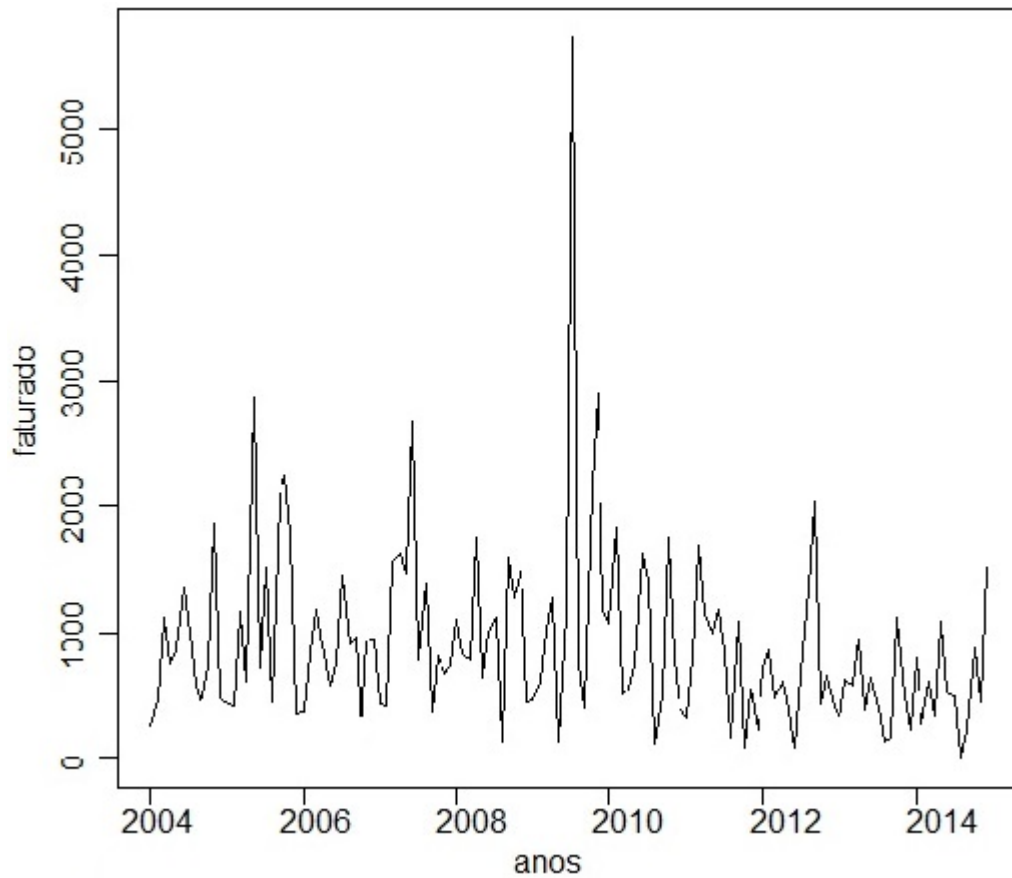


Figura 5.1: Cronograma do faturado do perfil A080,  $X_t$ .

Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS). Para o primeiro teste obteve-se um *p.value* de 0,01 que é menor que o nível de significância considerado,  $\alpha = 0,05$ , portanto rejeita-se a hipótese nula de não estacionaridade. Sendo assim, a série é estacionária e não há razões para se proceder à diferenciação.

No teste de KPSS o *p.value* é de 0,1, maior que 0,05 e portanto não há razões para se rejeitar a hipótese nula de estacionaridade. Sendo assim, chega-se à mesma conclusão.

Posto isto, efetua-se a decomposição STL (Seasonal Decomposition of Time Series) que decompõe a série temporal nas suas componentes: sazonal, tendência e resíduos. Esta decomposição utiliza a regressão polinomial local, Cleveland et al.[7]. Na Figura

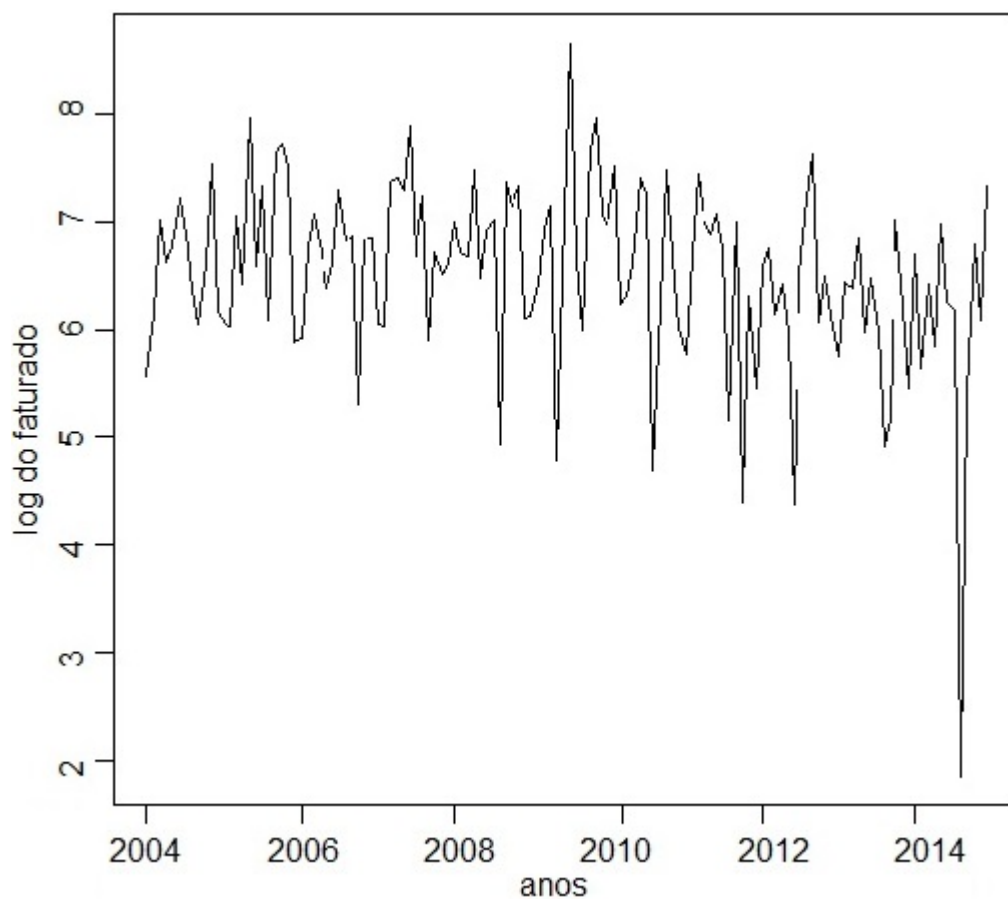


Figura 5.2: Cronograma do logaritmo do faturado do perfil A080,  $Y_t = \ln X_t$ .

5.4 apresenta-se a decomposição STL efetuada na série logaritmizada, onde o painel superior é o cronograma da série  $\ln X_t$ , o segundo painel apresenta a estimativa da componente sazonal, o terceiro painel apresenta a tendência e o ultimo representa a estimativa da componente residual.

Observe-se que a série considerada não apresenta tendência, tal como se constatou anteriormente, no entanto apresenta uma componente sazonal anual, isto é,  $S=12$ , que se torna mais evidente com esta decomposição.

Assim, conclui-se que a série  $\ln X_t$  é estacionária mas possui sazonalidade, o que sugere o modelo  $SARIMA(p, 0, q) \times (P, 0, Q)_{12}$  com  $p, q, P, Q \in N_0$ . Como se referiu

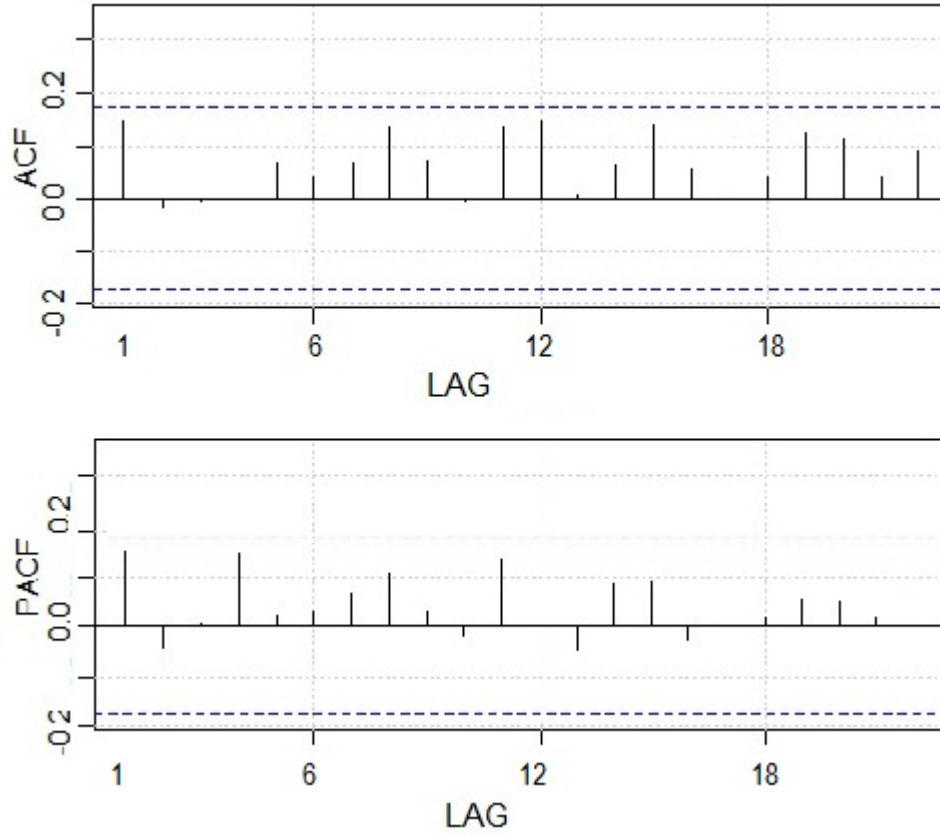


Figura 5.3: FAC e FACP estimada de  $Y_t$ .

na secção 4.1, para se identificar o modelo é necessário analisar-se a FAC e a FACP estimadas da sucessão estacionarizada,  $\ln X_t$ , que será modelada por um  $ARMA(p, q) \times (P, Q)_{12}$ .

Para se analisarem as funções, estas devem ser tratadas de duas formas distintas: a primeira através da análise dos "lags"  $k = 1, 2, 3, \dots$ , que auxiliam na identificação de (p,q) e a segunda através dos "lags"  $k = 12, 24, 36, \dots$ , que auxiliam na identificação da parte sazonal (P,Q). Analisando a Figura 5.3 observa-se que, quer os "lags"  $1, 2, 3, \dots$ , quer os "lags"  $12, 24, \dots$  não dão uma clara indicação de qual o modelo a ser escolhido e portanto fazem-se variar os valores de p, q, P e Q.

Para se escolher o "melhor" modelo, utilizou-se como critério de seleção o AIC e o

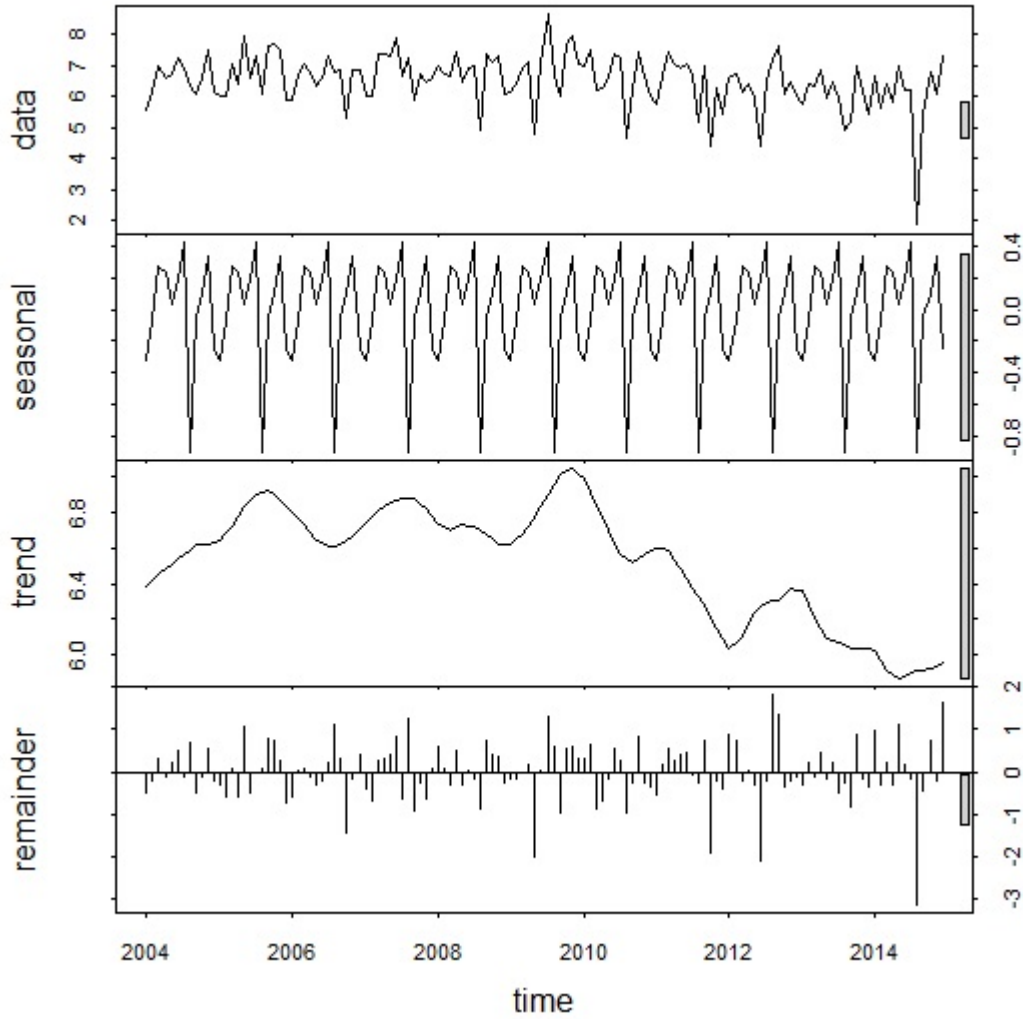


Figura 5.4: Decomposição STL de  $Y_t = \ln X_t$ .

BIC. A Tabela 5.1 apresenta os resultados dos critérios de seleção dos modelos em causa.

Analisando a Tabela 5.1, observa-se que o modelo  $SARIMA(0, 0, 1) \times (0, 0, 1)_{12}$  é o que possui um valor de AIC e de BIC mais pequeno e portanto deve escolher-se este modelo.

Como a série, apesar de ser estacionária, possui comportamento sazonal, experimenta-

$(p, d, q) \times (P, D, Q)$	AIC	BIC
$SARIMA(1, 0, 1) \times (0, 0, 1)_{12}$	0,687570	-0,225069
$SARIMA(1, 0, 1) \times (1, 0, 0)_{12}$	0,689612	-0,223030
$SARIMA(1, 0, 0) \times (0, 0, 1)_{12}$	0,673609	-0,260873
$SARIMA(1, 0, 0) \times (1, 0, 0)_{12}$	0,675983	-0,258499
$SARIMA(1, 0, 0) \times (1, 0, 1)_{12}$	0,677206	-0,245437
$SARIMA(0, 0, 1) \times (0, 0, 1)_{12}$	<b>0,672486</b>	<b>-0,261996</b>
$SARIMA(0, 0, 1) \times (1, 0, 0)_{12}$	0,674583	-0,259898
$SARIMA(0, 0, 1) \times (1, 0, 1)_{12}$	0,686225	-0,246417

Tabela 5.1: Critérios de seleção, AIC e BIC aplicados nos modelos.

se fazer a diferenciação sazonal e considerar o modelo  $SARIMA(0, 0, 1) \times (0, 1, 1)_{12}$ . Contudo, obteve-se um AIC e BIC maior que o obtido com o modelo considerado anteriormente, o que nos indica que apesar da série  $\ln X_t$  possuir sazonalidade, não é necessário fazer a diferenciação sazonal e portanto considera-se o modelo  $SARIMA(0, 0, 1) \times (0, 0, 1)_{12}$ .

Com esta escolha termina-se a etapa de identificação do modelo pelo método de Box e Jenkins e iniciando-se agora uma nova etapa, a estimação dos parâmetros.

### Etapa de Estimação

Nesta etapa estimam-se os parâmetros do modelo proposto. Para isso utilizou-se a package *astsa* que, com base na função de máxima verosimilhança, obteve-se os seguintes estimadores de máxima verosimilhança para os parâmetros,  $\hat{\theta}_1 = 0,1381$ ,  $\hat{\Theta}_1 = 0,1866$  e  $\hat{c} = 6,5180$ . Note-se que o valor de  $\hat{c}$  é uma estimativa de  $\mu_{Y_t}$ .

Assim,  $Y_t$  é modelado por um  $SARIMA(0, 0, 1) \times (0, 0, 1)_{12}$  cuja expressão é dada por  $Y_t = \alpha + \Theta(B^{12})\theta(B)\varepsilon_t$ , com  $\theta(B) = 1 - 0,1381B$  e  $\Theta(B^{12}) = 1 - 0,1866B^{12}$ . Também pode ser expresso conforme a seguinte equação:

$$Y_t = 6,5180 + \varepsilon_t - 0,1381\varepsilon_{t-1} - 0,1866\varepsilon_{t-12} + 0,0258\varepsilon_{t-13}.$$

## Etapa de Avaliação

Tendo-se identificado o modelo e estimado os respectivos parâmetros, passa-se à avaliação da qualidade estatística e à avaliação da qualidade de ajustamento do modelo.

### *Avaliação da qualidade estatística*

Nesta avaliação, deve-se verificar a significância estatística dos parâmetros estimados, pois é necessário ter sempre presente o princípio da parcimónia. Como se pode ver, nenhum deles está próximo de zero, portanto, consideram-se todos os parâmetros significativos.

Outra questão a ter em conta é a estacionaridade e invertibilidade do modelo, que tal como verificamos anteriormente, o modelo considerado é estacionário. Também ao calcular-se as raízes dos polinómios  $\theta(B) = 1 - 0,1381B$  e  $\Theta(B^{12}) = 1 - 0,1866B^{12}$  verifica-se que as raízes estão todas fora do círculo unitário, o que corrobora com a ideia de estacionaridade do modelo.

Também se deve ter em conta a estabilidade do modelo e para isso constrói-se a matriz de correlação dos estimadores dos parâmetros.

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.1345281 & 0.0081429 \\ -0.1345282 & 1 & -0.0419852 \\ 0.0081429 & -0.0419852 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como se pode ver, existe uma certa correlação entre os estimadores obtidos, no entanto, nenhuma delas é superior a 0.7, pelo que se pode concluir que o modelo é estável.

### *Avaliação da qualidade de ajustamento*

Nesta avaliação é necessário analisar se os resíduos do modelo estimado se comportam como um ruído branco. Para se verificar tal comportamento, analisa-se a FAC dos



resíduos, que como se pode ver pela Figura 5.5, as autocorrelações dos resíduos do modelo estimado não são significativas a 5% de significância e portanto pode-se concluir que os resíduos parecem ter o comportamento de um ruído branco.

Com o uso do teste de Box-Pierce, obtém-se um *p.value* de 0,9305 que é maior que o nível de significância,  $\alpha = 0,05$  e portanto não há razões para se rejeitar a hipótese nula de independência dos resíduos, logo pode assumir-se que estes têm o comportamento de um ruído branco. Também se pode analisar na Figura 5.5 o teste de Ljung-Box que mais uma vez reforça a ideia de ruído branco, uma vez que os *p.values* são maiores que o nível de significância considerado e portanto não há razões para se rejeitar a hipótese nula de ruído branco.

Para se terminar a avaliação do modelo estimado falta verificar se os resíduos têm distribuição normal. Pelo Q-Q Plot da Figura 5.6 não é claro poder assumir-se a normalidade. Usando o teste de Kolmogorov-Smirnov para testar a normalidade, obtém-se um *p.value* de 0,2862 que é superior ao nível de significância,  $\alpha = 0,05$  e portanto não há razões para se rejeitar que  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ , a este nível e significância.

Após se avaliar a qualidade do modelo  $SARIMA(0,0,1) \times (0,0,1)_{12}$  e se ter aceite o modelo para modelar a série  $Y_t$ , pode-se partir para a etapa da previsão.

A previsão foi obtida usando a função *sarima.for()* da package *astsa*, que fornece um gráfico de previsão, Figura 5.7.

Este exibe a vermelho as previsões obtidas desde janeiro de 2015 até dezembro de 2015 dos dados logaritmizados e a azul os valores do intervalo de previsão dados por  $\pm 2$  vezes o erro padrão associado a cada previsão, mantendo a confiança de 95%, aproximadamente.

No entanto o que se pretende são os valores de previsão do faturado do perfil A 080, para isso aplica-se a exponencial aos dados previstos anteriormente, isto é, às previsões dos dados logaritmizados.

Teoricamente, deve-se obter a previsão através da equação (3.6), no entanto, ao

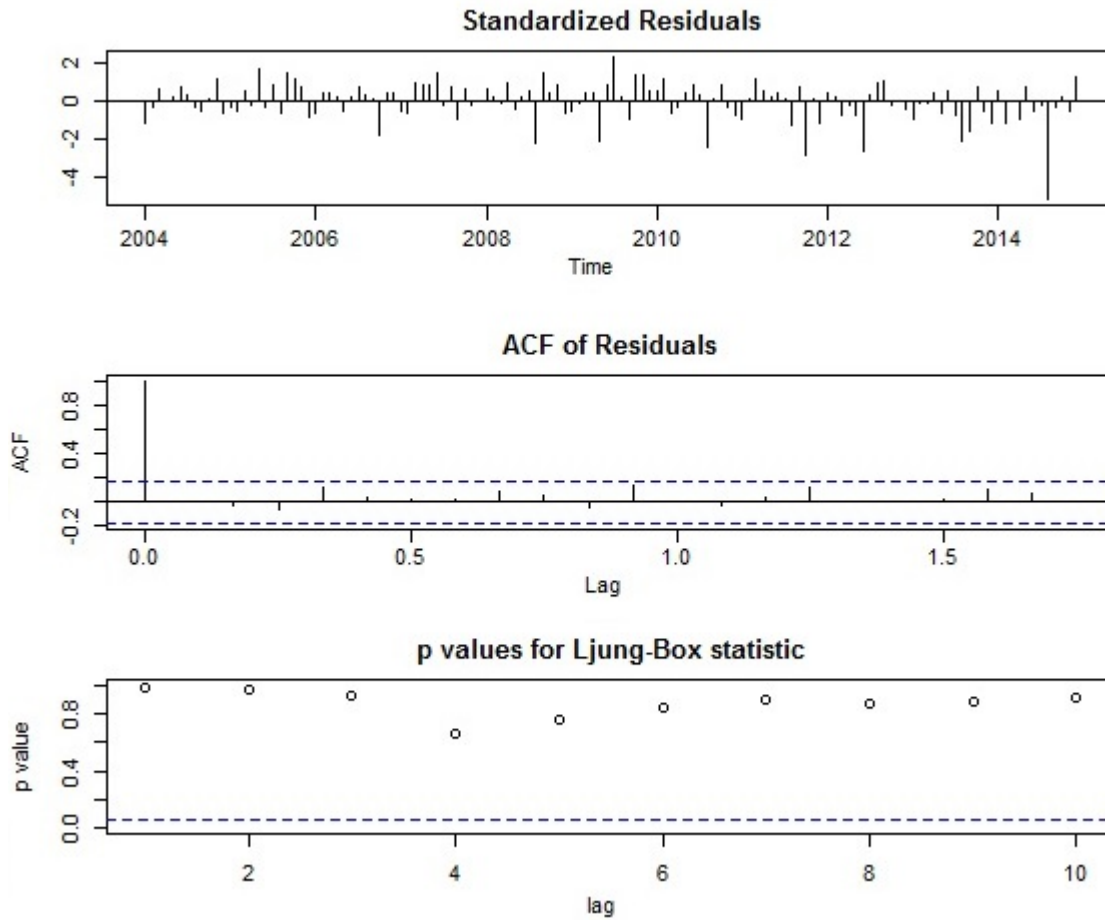


Figura 5.5: FAC dos resíduos e teste de Ljung Box.

efetuar-se essa transformação verificou-se um EQM maior do que fazendo apenas a transformação  $e^{Y_t(m)}$ .

Assim, efetuando-se apenas a transformação inversa, obteve-se na Tabela 5.2 os valores previstos para a série do faturado do perfil A 080 desde janeiro de 2015 até julho de 2015.

Como se pode ver na Tabela 5.2, os valores previstos não estão muito longe dos valores faturados, com exceção dos meses de abril e maio em que as previsões estão longe do que realmente foi faturado.

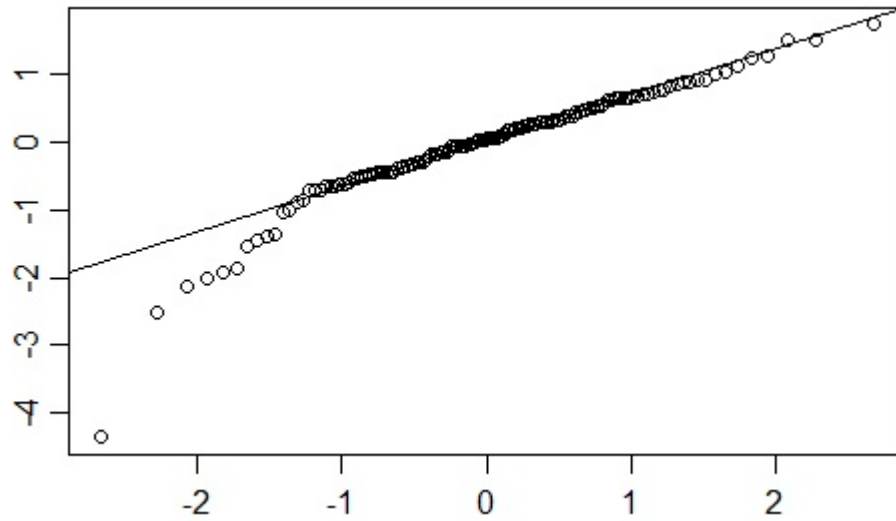


Figura 5.6: Q-Q Plot dos resíduos obtidos com o modelo  $SARIMA(0, 0, 1) \times (0, 0, 1)_{12}$ .

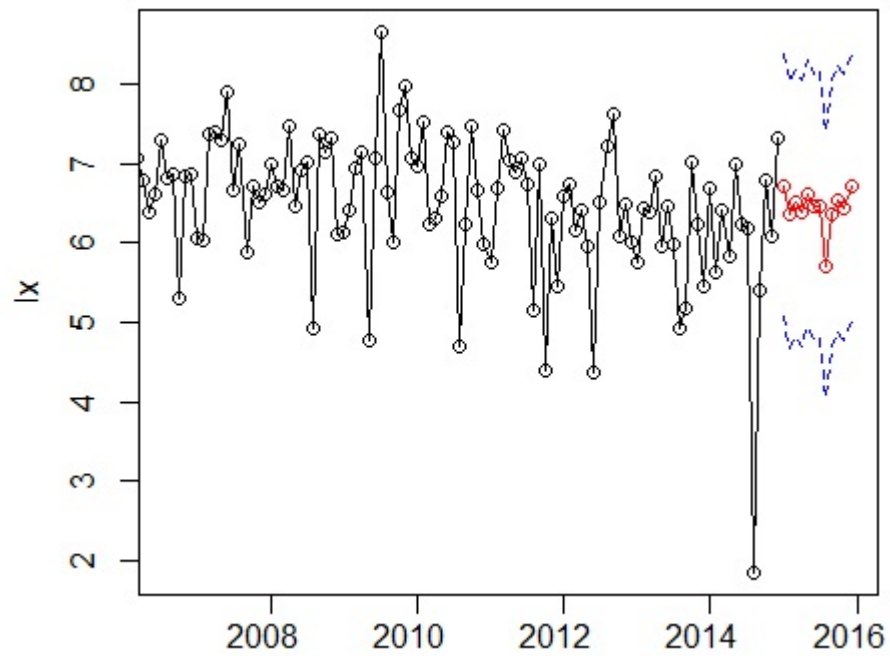


Figura 5.7: Representação da previsão obtida dos próximos 12 meses pelo método de Box e Jenkins para os dados transformados.

Meses	Previsão da sucessão $Y_t$	Previsão da sucessão $X_t$	Dados reais
Janeiro	6,72	831,67	460,43
Fevereiro	6,36	575,96	807,91
Março	6,50	665,87	468
Abril	6,38	587,50	205,5
Maiο	6,62	751,01	209,2
Junho	6,45	635,60	567,3
Julho	6,47	648,01	1122,8

Tabela 5.2: Previsão obtida para os dados logaritmizados, para os dados originais e valores reais do faturado desde janeiro de 2015 até julho de 2015.

### 5.2.2 Modelação automática de um ARIMA

Para modelar a série com um modelo ARIMA, Hyndman e Athanasopoulos[19] criaram uma função no R, designada por *auto.arima()*, baseada no algoritmo de Hyndman e Khandakar[20]. Esta função retorna o melhor modelo ARIMA, tendo em conta o teste de raiz unitária e a minimização do valor do AIC e BIC. Sendo assim, após a identificação do modelo é necessário fazer-se apenas a avaliação da qualidade de ajustamento do modelo.

Tal como se verificou na modelação anterior, é necessário transformar os dados para se diminuir a variabilidade e só depois usar a função *auto.arima()*. Com isto, identificou-se o modelo  $ARIMA(2, 1, 1)$ , cujas estimativas dos coeficientes são dadas por  $\phi_1 = 0.0515$ ,  $\phi_2 = -0.1453$  e  $\theta_1 = -0.9310$ .

A série do logaritmo do faturado, representado por  $Y_t = \ln X_t$  é assim expressa por  $\phi(B)(1 - B)Y_t = \theta(B)\varepsilon_t$  com  $\phi(B) = 1 - 0,0515B + 0,1453B^2$  e  $\theta(B) = 1 - 0,9310B$ . Desenvolvendo esta expressão, obtém-se a seguinte equação do modelo

$$Y_t = 1,0515Y_{t-1} - 0,1968Y_{t-2} + 0,1453Y_{t-3} + \varepsilon_t + 0,9310\varepsilon_{t-1}.$$

Após a identificação do modelo e a estimação dos parâmetros é necessário fazer a

avaliação do modelo em causa.

Tendo em conta que o modelo foi escolhido com base em características que satisfazem a sua qualidade estatística, só é necessário fazer a avaliação da qualidade de ajustamento do modelo, isto é, verificar se os resíduos têm um comportamento análogo a um ruído branco e se seguem uma distribuição Normal.

Na Figura 5.8 apresenta-se a FAC dos resíduos estimados bem como o teste de Ljung-Box. Como se pode analisar a FAC residual é aproximadamente nula em todos os "lags" considerados e os p-values obtidos pelo teste de Ljung-Box são superiores ao valor estabelecido para nível de significância de 0,05 para todos os "lags". Além disso, ao efetuar-se o teste de Box-Pierce, obteve-se um p-value 0,9659, maior que  $\alpha = 0,05$ , o que confirma o comportamento de ruído branco.

A próxima análise aos resíduos é verificar a sua normalidade. Como se pode observar pelo Q-Q Plot dos resíduos da Figura 5.8, os resíduos têm distribuição Normal com média aproximadamente nula. Também se fez o teste de Kolmogorov-Smirnov e obteve-se um *p.value* de 0,1582, o que nos leva à não rejeição da hipótese nula e portanto conclui-se que não há razões para se rejeitar que  $\varepsilon_t \sim RBN(0, 0.68)$ .

Posto isto, pode-se partir para a etapa da previsão. Note-se que, quando se considera o modelo  $ARIMA(2, 1, 1)$ , obtém-se um AIC de 0,6683045 e o BIC de -0,2443379. Comparando estes valores com os da Tabela 5.1, observa-se que o valor do AIC no modelo sugerido pela função *auto.arima()* é menor, e o BIC maior, que os do modelo identificado na secção anterior.

Partindo-se para a etapa da previsão, apresenta-se na Figura 5.9 a vermelho a previsão obtida para o ano de 2015, para os dados logaritmizados usando-se o modelo  $ARIMA(2, 1, 1)$  e a azul os limites superior e inferior do intervalo de previsão calculado a 95% de confiança, como anteriormente se referiu.

No entanto o que se pretende são os valores de previsão do faturado do perfil A 080, para isso aplica-se apenas a exponencial às previsões dos dados logaritmizados, uma vez que se obtém um EQM menor do que fazendo a equação (3.6). Na Tabela 5.3

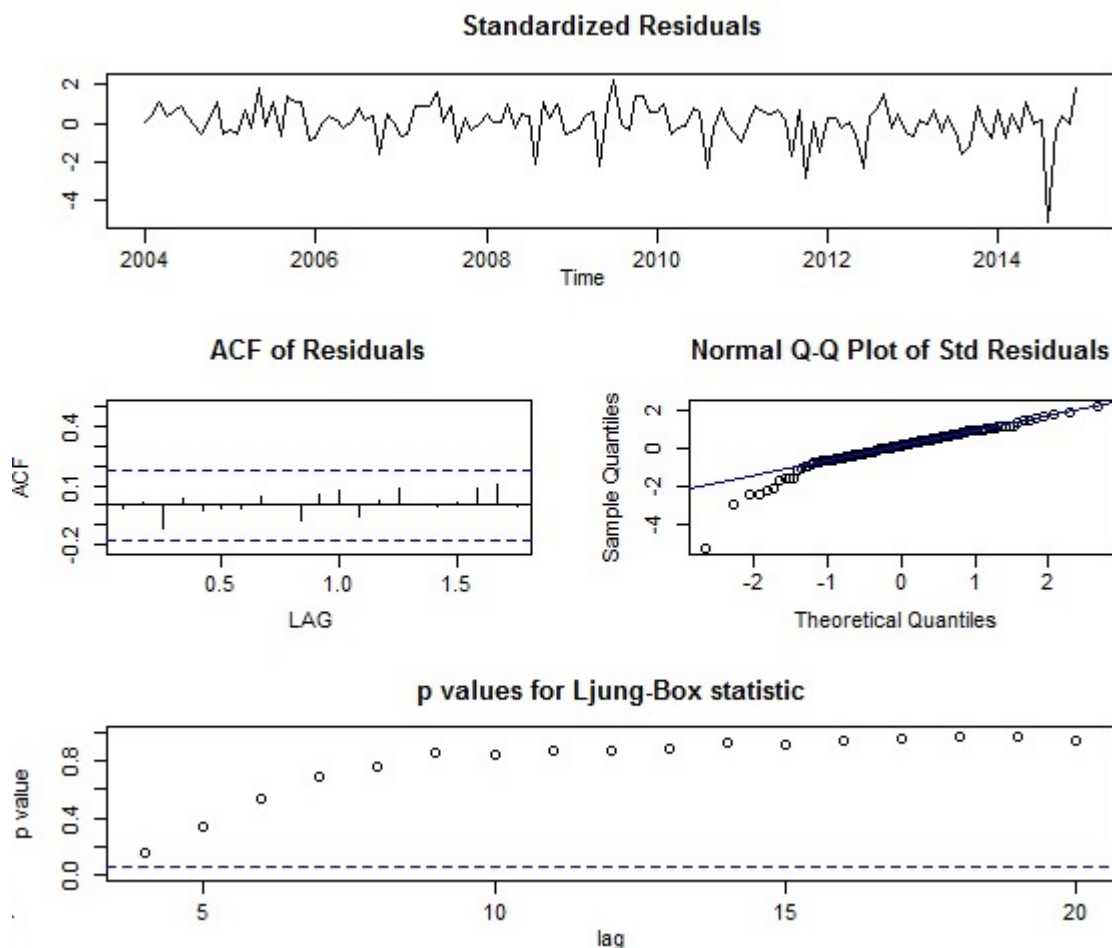


Figura 5.8: Avaliação da qualidade de ajustamento do modelo.

apresentam-se os valores obtidos.

Como se pode ver na Tabela 5.3 a faturação dos meses de janeiro, março e maio foram satisfatoriamente prevista enquanto que nos meses de fevereiro, abril e julho a faturação prevista está longe dos valores reais.

Comparando os valores da Tabela 5.3 com os da Tabela 5.2, observa-se que nos meses janeiro, março, abril e maio o modelo  $ARIMA(2, 1, 1)$  aproxima-se mais dos valores reais faturados do que o modelo  $SARIMA(0, 0, 1)(0, 0, 1)_{12}$ . Nos meses fevereiro, junho e julho é o modelo identificado na secção anterior que está mais próximo.

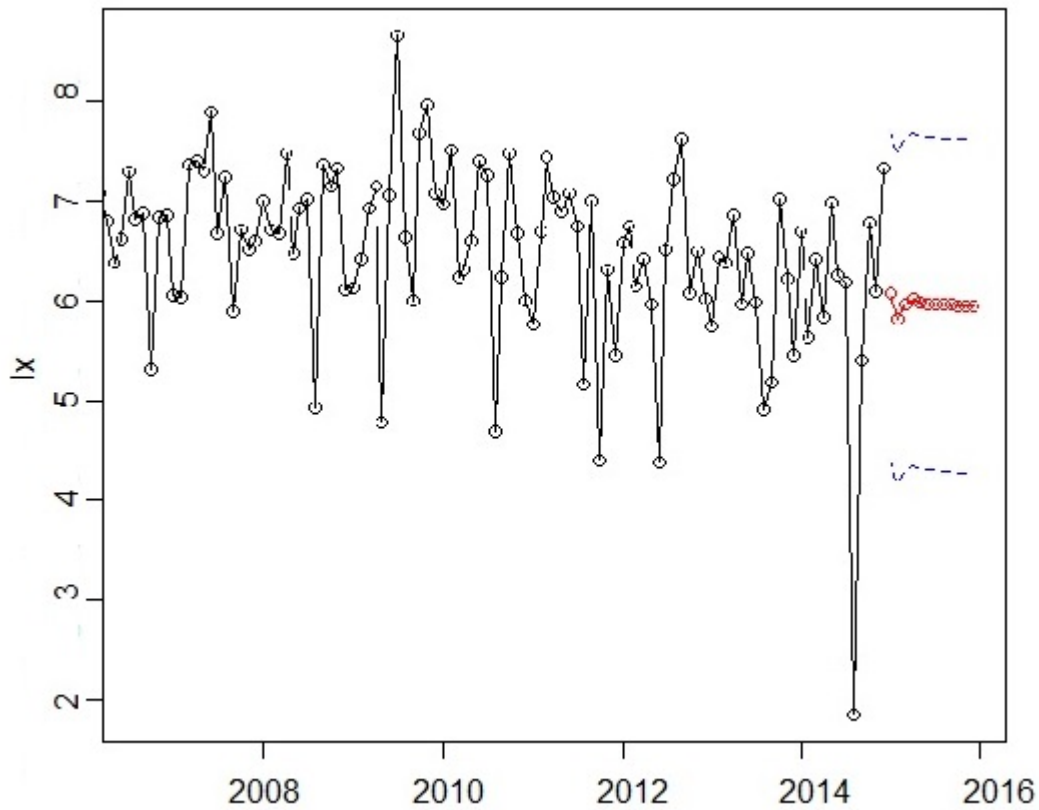


Figura 5.9: Representação da previsão obtida para o ano de 2015 pelo método automático para os dados transformados.

### 5.2.3 Metodologia de Alisamento Exponencial para a série do faturado do perfil A 080

Com o objetivo de ajustar um modelo de Alisamento Exponencial à série do faturado do perfil em questão, analisam-se as componentes a incluir no modelo. Como se observou na Figura 5.1, a série não apresenta tendência e aparentemente não se consegue encontrar sazonalidade. No entanto, quando se procedeu à decomposição STL a Figura 5.4 sugere sazonalidade aditiva.

Assim, são testados dois modelos, um modelo sem tendência e com sazonalidade aditiva que se representa por  $(N,A)$  e outro sem tendência e sem sazonalidade,  $(N,N)$ ,

Meses	Previsão ARIMA(2,1,1)	Previsão da sucessão $X_t$	Dados reais
janeiro	6,07	431,98	460,43
fevereiro	5,81	334,71	807,91
março	5,97	391,61	468
abril	6,01	407,05	205,5
maio	5,98	396,33	209,2
junho	5,97	390,95	567,3
julho	5,96	389,54	1122,8

Tabela 5.3: Comparação entre a previsão obtida para os dados logaritmizados usando o modelo ARIMA(2,1,1), as previsões para os dados originais e os valores reais do faturado desde janeiro de 2015 até julho de 2015.

conhecido na literatura por modelo de Alisamento Exponencial Simples.

### Estimação das Componentes

Nesta etapa, estimam-se os parâmetros dos modelos anteriores. Considere-se o modelo de Alisamento Exponencial Simples, modelo (N,N), onde é necessário estimar a constante de alisamento  $\alpha$ , usando o critério de minimização da soma dos quadrados dos erros de previsão.

Com a ajuda do programa *R*, definiu-se uma função *alpha()*, Apêndice A.3, que calcula para cada valor de  $\alpha \in ]0, 1[$ , as previsões a um passo, a soma dos quadrados dos erros associados, bem como o valor mínimo desta soma e o valor de  $\alpha$  que lhe corresponde. A Figura 5.10 representa a soma dos quadrados dos erros associados a cada valor de  $\alpha \in ]0, 1[$ .

Como se pode ver pela Figura 5.10 o valor de  $\alpha$  é aproximadamente 0,1. Usando a função *alpha()* obtém-se o valor para a constante de alisamento exponencial,  $\alpha = 0,107$ .

Para se obter o valor de outras constantes quando se consideram outros modelos,



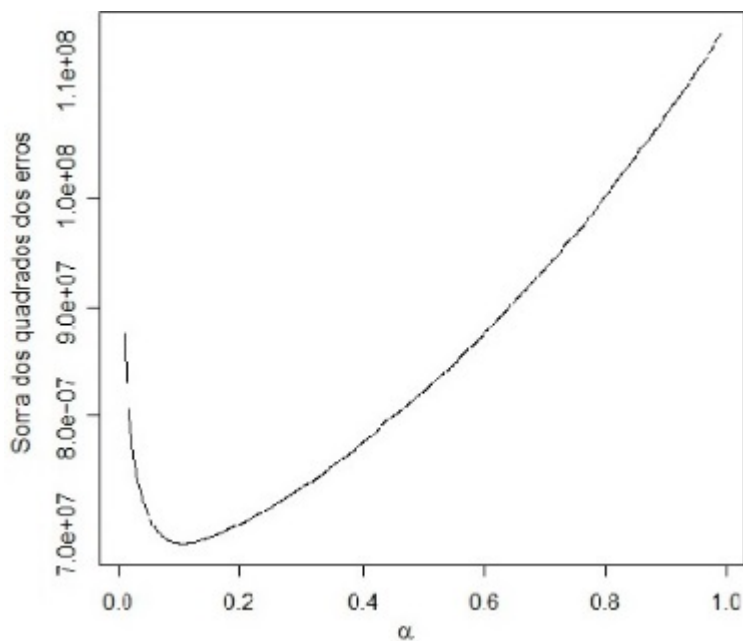


Figura 5.10: Soma dos quadrados dos erros associados a cada valor de  $\alpha \in ]0, 1[$ .

a função que se usaria para estimá-los seria análoga. No entanto, por simplicidade de código, utilizou-se a package *stats* do *R* que rapidamente dá o valor de todas as estimativas das componentes, bem como das constantes, do modelo em causa. Na Tabela 5.4 apresentam-se as estimativas obtidas das componentes para o modelo (N,N).

$\alpha$	0,1072
$l_1$	622,2981

Tabela 5.4: Estimativa das componentes do modelo (N,N).

Após se ter aplicado o modelo de Alisamento Exponencial Simples, considera-se um modelo também sem tendência mas com sazonalidade aditiva, isto é, o modelo (N,A).

Na Tabela 5.5 apresentam-se as estimativas obtidas das componentes para o modelo (N,A).

$\alpha$	0,0465	$s_3$	-20,3431	$s_8$	-372,6923
$\gamma$	0,2636	$s_4$	-45,5844	$s_9$	-50,2047
$I_1$	643,3589	$s_5$	37,6227	$s_{10}$	165,1650
$s_1$	-207,0525	$s_6$	-32,35613	$s_{11}$	60,3331
$s_2$	-50,1395,0525	$s_7$	230,3171	$s_{12}$	-53,6115

Tabela 5.5: Estimativa das componentes do modelo (N,A).

### Estudo da Componente Residual

É através da análise dos resíduos que se verifica se o modelo obtido descreve bem ou não a sucessão em estudo. Segundo Hyndman et al.[21], considera-se um modelo adequado se os resíduos apresentarem características de um ruído branco.

Tendo em conta que os resíduos dos dois modelos anteriores têm média próxima de zero e os valores estimados da FAC e FACP dos resíduos dos modelos (N,N) e (N,A) têm valores significativamente nulos, Figura 5.11, pode-se afirmar que os resíduos têm característica de um ruído branco.

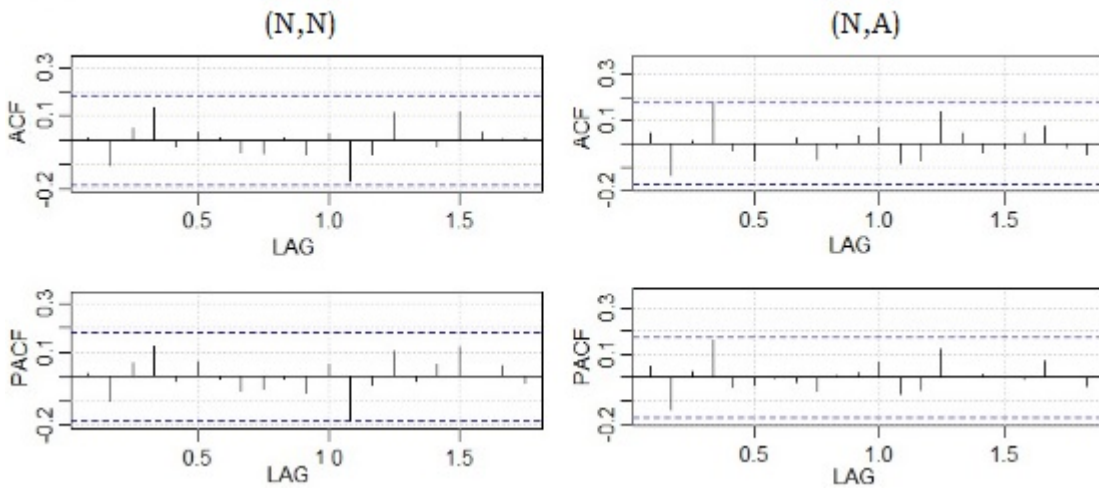


Figura 5.11: FAC e FACP da componente residual do modelo (N,N) e do modelo (N,A.)

Também se fez o teste de Box-Pierce relativamente aos resíduos obtidos dos modelos (N,N) e (N,A) e obtiveram-se, respetivamente, os *p-value* de 0,5838 e de 0,914, o que corrobora com a ideia de ruído branco. No entanto, ao fazer o teste de Kolmogorov-Smirnov para testar a normalidade dos resíduos, obtiveram-se p-values de 0,03533 e 0,08289, respetivamente. Conclui-se que os resíduos resultantes quando se considera o modelo de Amortecimento Exponencial Simples (N,N) não têm distribuição Normal, enquanto que para os resíduos resultantes do modelo (N,A) não há razões para se rejeitar a hipótese de normalidade, ao nível de significância de 5%.

Sendo assim, a condição necessária de ruído branco é satisfeita nos dois modelos, mas a distribuição normal dos resíduos apenas é satisfeita num deles. Segundo Hyndman et al.[21] e Ramos[39], esta última condição é vantajosa mas não necessária, portanto considera-se que os modelos são adequados e pode-se partir para a etapa de previsão. Note-se que se for considerado  $\alpha = 0,01$ , outro nível de significância usualmente usado, a conclusão é comum nos dois modelos.

Na Figura 5.12 e na Figura 5.13 apresentam-se os valores previstos usando o modelo (N,N) e o modelo (N,A).

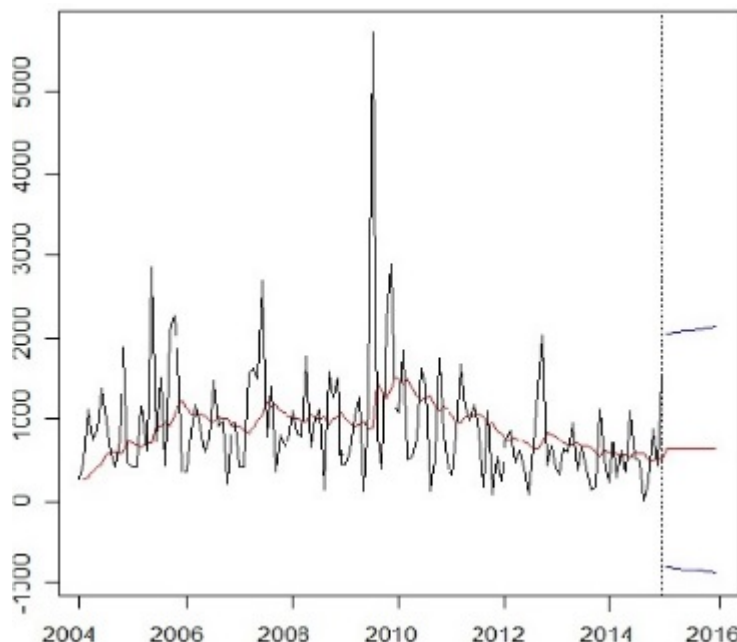


Figura 5.12: Representação das estimativas do faturado desde 2004 até 2015 obtidas pelo modelo (N,N).

#### 5.2.4 Modelo ETS para a série do faturado do perfil A 080

Nesta secção, tenta-se modelar os dados usando modelos de espaço de estados que têm por base os métodos de Amortecimento Exponencial que, além de gerar as mesmas previsões pontuais, obtêm também intervalos de previsão.

Utilizando a package *forecast* do *R*, pode-se obter um modelo de Espaço de Estados automaticamente, através da função *ets()*. Ao considerar o argumento *model* desta função como *model="ZZZ"*, a função retorna o melhor modelo entre qualquer combinação dos tipos de erros, tendência e sazonalidade, tendo em conta a minimização do valor do AIC e BIC. Além disso, produz intervalos de predição e assegura que as estimativas dos parâmetros sejam admissíveis, isto é, que o modelo seja invertível, Hyndman e Athanasopoulos[19].

Usando a função *ets()* aplicada aos dados do faturado da série A 080, obteve-se o modelo ETS(M,N,M), isto é, um modelo de Espaço de Estados onde os erros são

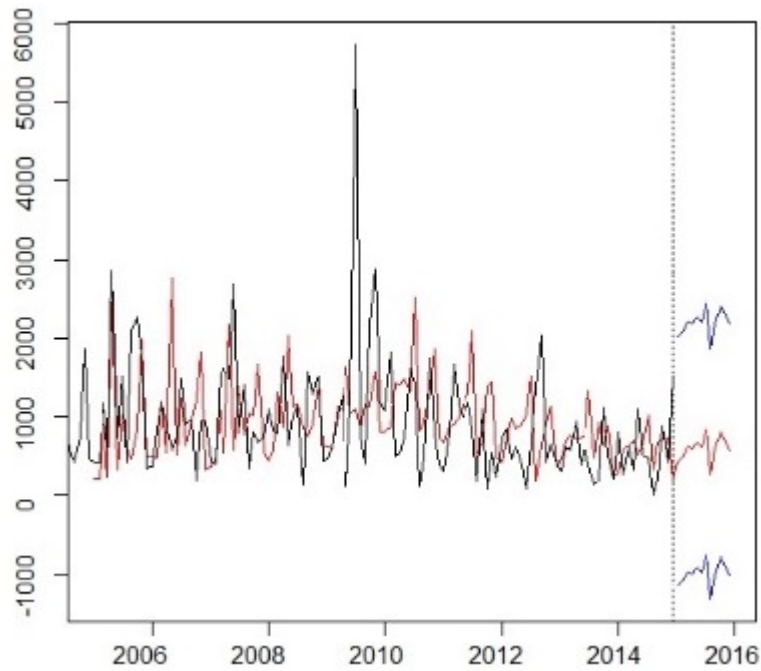


Figura 5.13: Representação das estimativas do faturado desde 2004 até 2015 obtidas pelo modelo (N,A).

considerados multiplicativos, os dados não têm tendência mas possuem sazonalidade multiplicativa. O modelo obtido vai ao encontro com o que se viu anteriormente, pois considera que não existe tendência mas existe sazonalidade nos dados.

Na Tabela 5.6 apresentam-se as estimativas obtidas das componentes para o modelo ETS(M,N,M).

$\alpha$	0,0314	$s_3$	0,9687	$s_8$	1,319
$\gamma$	0,0002	$s_4$	1,2572	$s_9$	0,9467
$l_1$	977,7993	$s_5$	0,8475	$s_{10}$	0,9303
$s_1$	0,6552	$s_6$	1,5798	$s_{11}$	0,7248
$s_2$	1,0453	$s_7$	1,1781	$s_{12}$	0,5476

Tabela 5.6: Estimativa das componentes do modelo ETS(M,N,M).

## Estudo da Componente Residual

Após a estimação das componentes do modelo é necessário verificar se os resíduos apresentam características de ruído branco gaussiano. Através da FAC e FACP estimada, Figura 5.14, verifica-se que os valores são significativamente nulos e portanto não existem razões para não se considerar um comportamento de ruído branco.

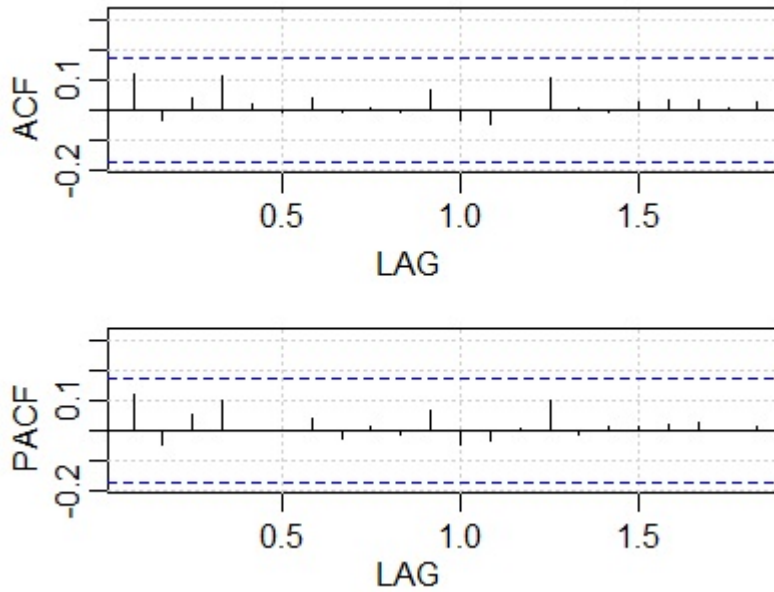


Figura 5.14: FAC e FACP da componente residual do modelo ETS(M,N,M).

Também fazendo o teste de Box-Pierce obteve-se o *p.value* de 0,9332, o que corrobora com a ideia de ruído branco. No entanto, ao fazer o teste de Kolmogorov-Smirnov para testar a normalidade dos resíduos, obteve-se um *p.value* de 0,0341 e portanto há razões para se rejeitar a hipótese de normalidade dos resíduos, ao nível de significância de 5%. Mas tal como referimos no modelo anterior, esta última conclusão é dependente do nível de significância considerado e não é imprescindível para se poder considerar que o modelo é adequado.

Posto isto, fez-se a previsão e obteve-se, além das previsões pontuais, o intervalo

de previsão a 80% e a 95% de confiança. Na Figura 5.15 representam-se graficamente os valores previstos, bem como os intervalos de previsão considerados. Na Tabela 5.7 pode-se comparar os valores reais do faturado com os previstos.

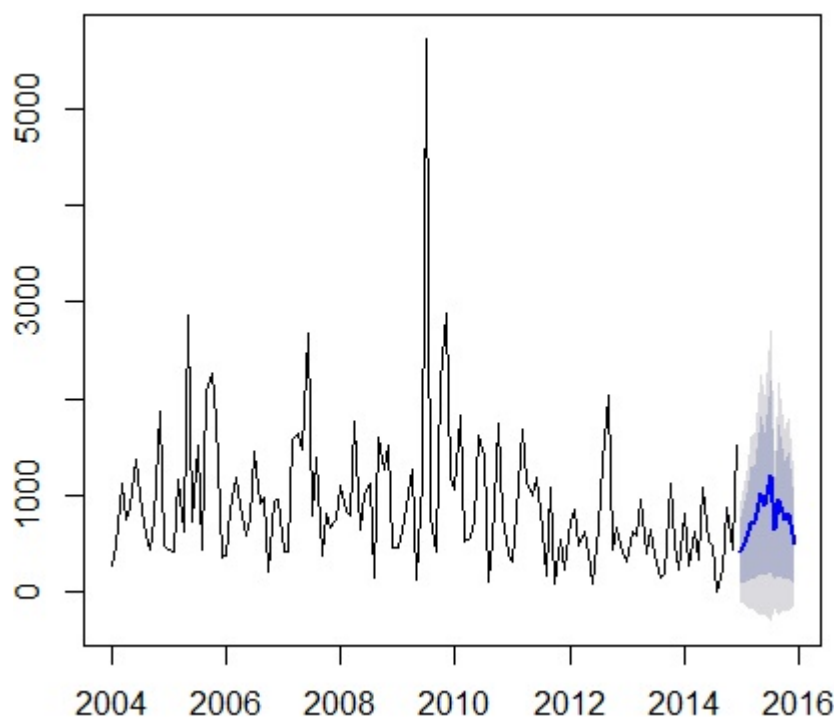


Figura 5.15: Representação da previsão do ano de 2015 considerando o modelo ETS(M,N,M).

Como se pode observar na Tabela 5.7, os valores previstos no mês de janeiro e julho, estão muito próximos dos valores do faturado do perfil A 080, no entanto no mês de maio existe uma grande discrepância.

Relativamente aos intervalos de confiança, pode-se observar que os de 95% têm os limites inferiores negativo, o que no contexto do problema não faz sentido, pois no pior dos casos não se fatura e portanto os limites inferiores devem ser considerados como zero. Já os I.C a 80% são uma grande alternativa que a empresa pode ter em conta quando está interessada em fazer previsões e em tomar decisões relativas a ordens de

Meses	Dados reais	Previsão ETS(M,N,M)	I.C no nível de 95%	I.C no nível de 80%
Janeiro	460,43	417	]−105, 73; 941, 36[	]75, 49; 760, 14[
Fevereiro	807,91	552,95	]−140, 41; 1246, 31[	]99, 59; 1006, 32[
Março	468	709,87	]−180, 87; 1600, 61[	]127, 45; 1292, 29[
Abril	205,5	722,34	]−184, 67; 1629, 35[	]129, 27; 1315, 40[
Maio	209,2	1005,91	]−258, 05; 2269, 87[	]179, 45; 1832, 37[
Junho	567,3	898,68	]−231, 32; 2028, 68[	]159, 81; 1637, 55[
Julho	1122,8	1205,14	]−311, 25; 2721, 54[	]213.63; 2196, 66[

Tabela 5.7: Tabela com os valores reais do faturado do perfil A 080 desde janeiro até julho de 2015, bem como as previsões obtidas pelo modelo ETS(M,N,M) e os respectivos intervalos de confiança a 95% e a 80%.

produção, uma vez que todos os valores do faturado pertencem aos I.C a 80% e ainda têm uma amplitude menor que os I.C a 95%.

### 5.2.5 Comparação de Resultados e Previsão da série do faturado do perfil A 080

Nesta fase, a comparação dos resultados, obtidos pelos 5 modelos considerados anteriormente, passa a ser o principal objetivo. Assim, é necessário verificar qual o modelo que prevê melhor e para isso considera-se como critério de seleção o erro quadrático médio (EQM).

Na Tabela 5.8, apresentam-se os valores reais do faturado do perfil A 080 nos meses entre janeiro e julho de 2015, bem como os valores previstos do faturado para esses meses, pelos cinco modelos considerados. Isto é, do modelo obtido usando a metodologia Box e Jenkins ( $SARIMA(0, 0, 1) \times (0, 0, 1)_{12}$ ), usando a função automática de Hyndman para as séries ARIMA ( $ARIMA(2, 1, 1)$ ), usando os Modelos de Amortecimento Exponencial (Modelo  $(N, N)$  e Modelo  $(N, A)$ ) e usando a função automática



de Hyndman para os modelos de Espaço de Estados ( $ETS(M, N, M)$ ).

Meses	Valores Reais	SARIMA (0, 0, 1)(0, 0, 1) <sub>12</sub>	ARIMA(2,1,1)	(N,N) AES	(N,A)	(M,N,M) ETS
<b>Jan</b>	460,43	831,67	444,24	622,29	436,31	417,81
<b>Fev</b>	807,91	575,96	348,25	622,29	493,22	552,95
<b>Mar</b>	468	665,86	411,11	622,29	623,02	709,87
<b>Abr</b>	205,5	587,5	429,57	622,29	597,77	722,33
<b>Mai</b>	209,2	751,01	420,29	622,29	680,98	1005,91
<b>Jun</b>	567,3	635,6	417,14	622,29	611	898,68
<b>Jul</b>	1122,8	648,01	418,31	622,29	873,67	1205,14

Tabela 5.8: Valores reais e previstos para a série do faturado do perfil A 080.

Como se pode observar na Tabela 5.8 os valores previstos pelos modelos não estão muito próximos dos valores reais, principalmente nos meses de Fevereiro, Abril e Maio. Este afastamento pode dever-se a questões sociais pelos quais a empresa, como muitas outras do nosso país, se encontra a ultrapassar nos últimos anos. No entanto, existe bastante proximidade dos resultados para o mês de junho.

Comparando os valores reais, com os previstos pelos modelos, verifica-se que o modelo que obtém previsões mais próximas do real é o modelo de Alisamento Exponencial (N,A) e o modelo que obtém previsões mais afastadas é o ETS(M,N,M).

Como se pode ver pela Tabela 5.9, o modelo que possui menor erro quadrático médio é o modelo (N,A), isto é, o modelo de Amortecimento Exponencial sem tendência e com sazonalidade aditiva, portanto deve ser o que a empresa deve utilizar para a previsão do faturado do perfil A 080.

Modelo	EQM
$SARIMA(0, 0, 1) \times (0, 0, 1)_{12}$	128620,1
$ARIMA(2, 1, 1)$	118343,8
AES(N,N)	97478,6
(N,A)	<b>80581,5</b>
ETS(M,N,M)	163396,4

Tabela 5.9: EQM para os cinco modelos estudados.

## 5.3 Perfil A 333

### 5.3.1 Metodologia Box e Jenkins para a série do faturado do perfil A 333

#### Etapa de Identificação

Para se identificar os modelos apropriados para a previsão do faturado do perfil A 333, deve-se analisar o cronograma da série em estudo.

Como se pode ver na Figura 5.16, a sucessão apresenta bastante variabilidade e uma tendência decrescente ao longo do tempo. Assim a série em estudo não é estacionária quanto à variância nem quanto à média e portanto deve-se começar por logaritmizar a série, para se diminuir a variabilidade e depois diferencia-la, caso a sucessão resultante da transformação continue não estacionária.

Ao analisar o cronograma da sucessão transformada,  $Z_t = \ln(F_t)$ , isto é, da série do logaritmo do faturado do perfil A 333, Figura 5.17, e os gráficos das FAC e FACP respectivas, Figura 5.18, verifica-se que a série  $Z_t$  continua a apresentar tendência decrescente incluindo movimentos periódicos de 12 em 12 meses, Figura 5.19. Portanto a série é manifestamente não estacionária. Para confirmar esta suspeita, realiza-se o teste KPSS cujo *p.value* obtido é de 0,01 que é menor que o nível de significância  $\alpha = 0,05$ , portanto rejeita-se a hipótese nula de estacionaridade, confirmando as suspeitas anteriores.

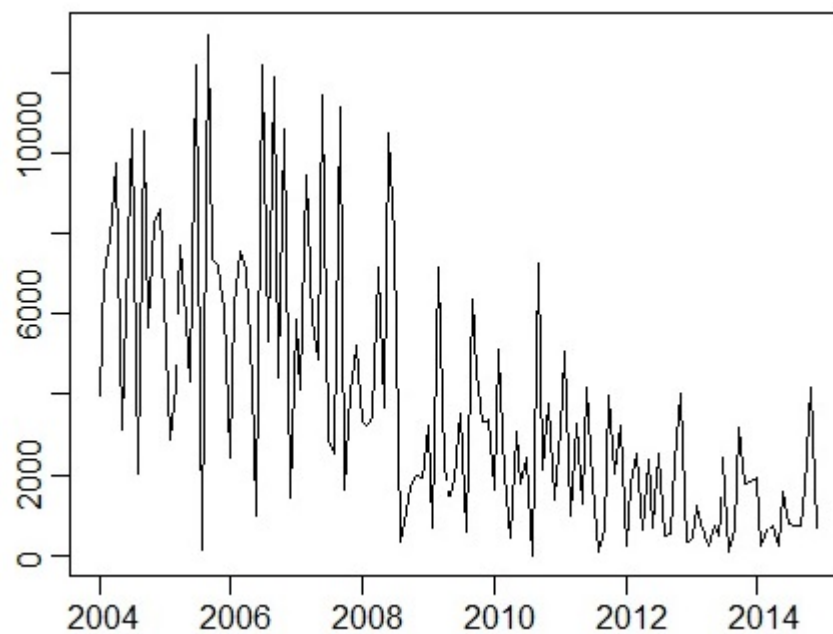


Figura 5.16: Cronograma do faturado do perfil A 333,  $F_t$ , desde janeiro de 2004 até dezembro de 2014.

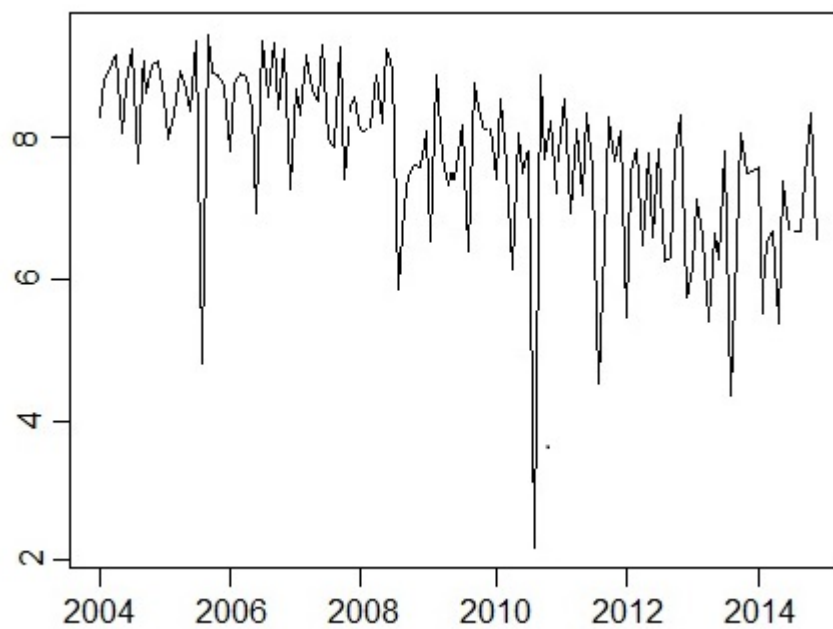


Figura 5.17: Cronograma da série logaritimizada,  $Z_t$ .

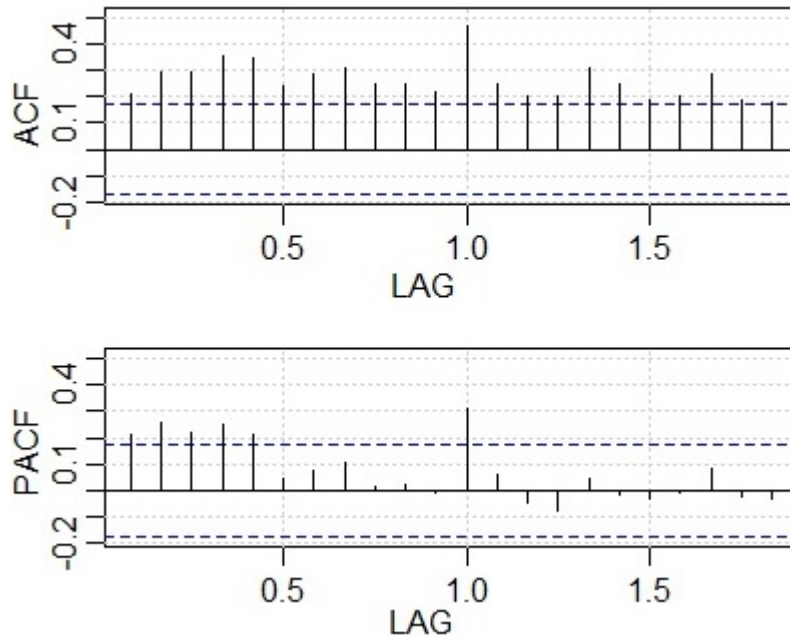


Figura 5.18: FAC e FACP estimada da sucessão  $Z_t$ .

Assim, a fim de se retirar a tendência presente na série e a tornar estacionária, a sucessão  $Z(t)$  foi sujeita a uma diferenciação simples  $\nabla Z(t)$ . Como se pode observar pela Figura 5.20, os "lags"  $k = 12, 24, 36, 48$  da FAC decaem lentamente para zero, o que nos indica que a aplicação da diferenciação simples não foi suficiente para tornar a série estacionária, mostrando também que existem movimentos periódicos de 12 em 12 meses.

Ao efetuar-se o teste KPSS, obtém-se novamente um *p.value* de 0,01, menor que  $\alpha = 0,05$  o que leva a rejeitar a hipótese nula de estacionaridade e portanto, apesar de se ter efetuado uma diferenciação simples, a série continua não estacionária. Como se referiu anteriormente, a série apresenta movimentos periódicos de 12 em 12 meses e portanto a falta de estacionaridade pode dever-se ao facto de estes movimentos existirem, portanto, é necessário efetuar-se uma diferenciação sazonal.

Aplicando-se a diferenciação sazonal,  $\nabla_{12}\nabla Z_t$ , e analisando-se as Figuras 5.21, pode-se afirmar que a sucessão resultante parece ser estacionária. Para confirmar este

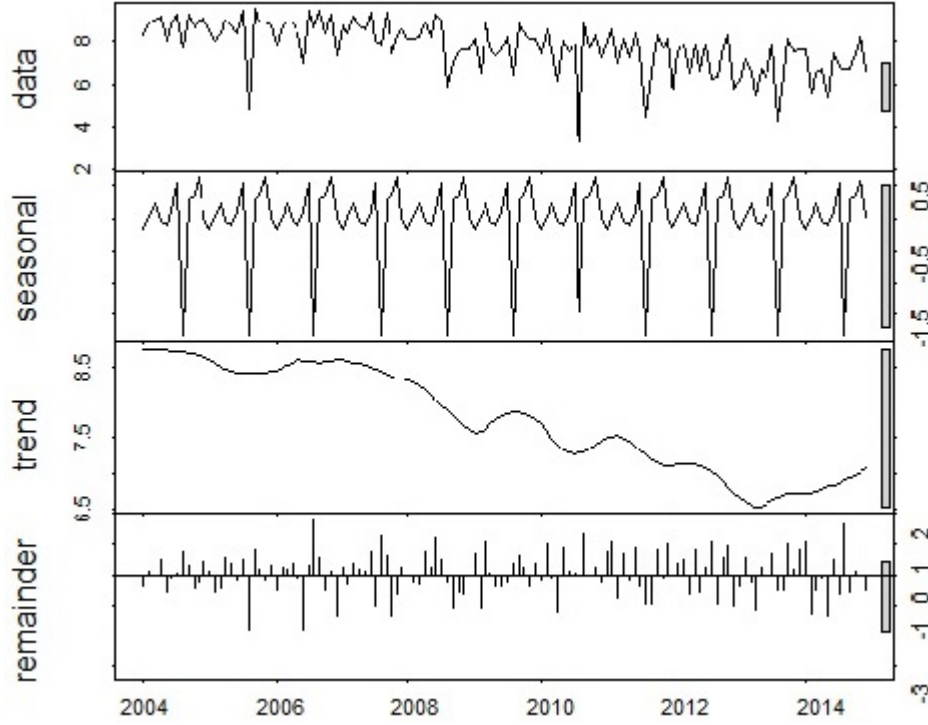


Figura 5.19: Decomposição STL de  $Z_t$ .

facto, realiza-se novamente o teste de KPSS. Este, confirma o facto de se estar perante uma série estacionária, uma vez que se obtém um *p.value* de 0,1 que é maior que  $\alpha = 0,05$ . Assim, para tornar a série estacionária foi necessário efetuar-se duas diferenciações, a simples e a sazonal, logo  $d=1$  e  $D=1$ .

Para se identificar os restantes parâmetros do modelo é necessário analisar a FAC e a FACP estimadas da sucessão estacionária  $\nabla_{12}\nabla Z_t$ , que será modelada por um  $ARMA(p, q) \times (P, Q)_{12}$ . Para se identificar  $(p, q)$  e  $(P, Q)$ , deve-se analisar respetivamente os "lags"  $k = 1, 2, 3, \dots$  e os "lags"  $k = 12, 24, 36, \dots$

Apesar da Figura 5.21 não ser muito esclarecedora quanto à identificação dos parâmetros, consegue-se identificar na FAC estimada uma queda brusca depois de  $k=1$ . A FACP apresenta um decaimento exponencial para  $k = 1, 2, 3, \dots$ , sugerindo  $p=0$  e  $q=1$ . Para os "lags"  $k = 12, 24, 36, \dots$  a FAC apresenta uma queda brusca depois de  $k=12$  e a FACP apresenta um decaimento sinusoidal para zero o que sugere  $P=0$  e

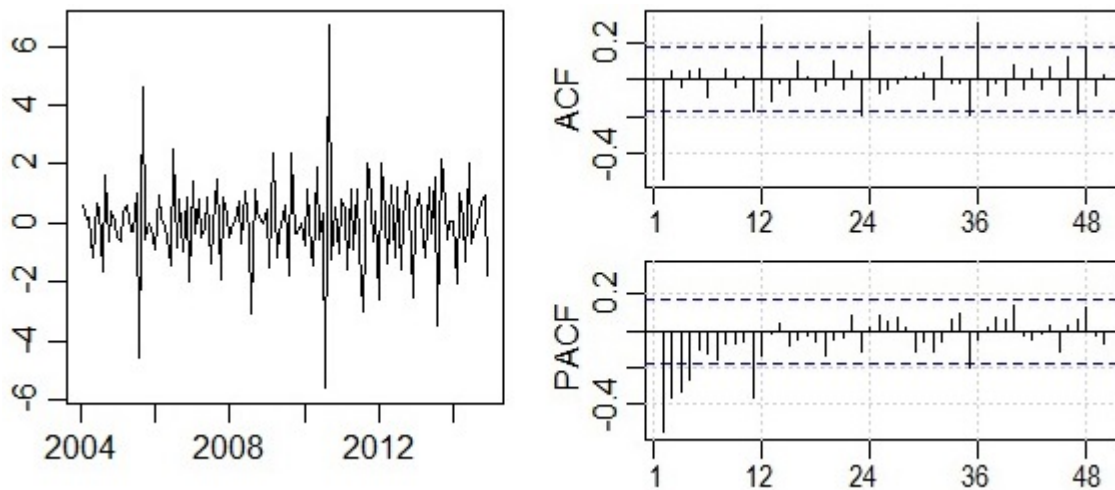


Figura 5.20: Cronograma, FAC e FACP estimada dada pela sucessão  $\nabla Z_t$ .

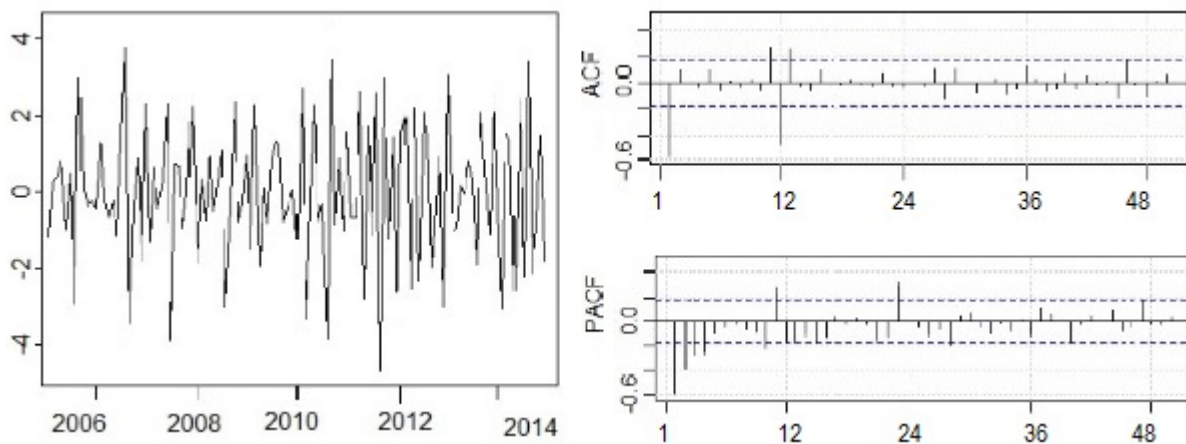


Figura 5.21: Cronograma, FAC e FACP estimada da série logaritimizada,  $\nabla_{12}\nabla Z_t$ .

$Q=2$ . Assim, identifica-se o modelo  $SARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 2)_{12}$  para modelar a série  $Z_t$ . No entanto, após se ter estimado os respectivos parâmetros verifica-se que alguns destes são em módulo superiores a 1. Além disso ao avaliar-se a qualidade estatística do modelo, verifica-se realmente que o modelo não é invertível. Portanto, há a necessidade de voltar à fase de identificação.

Assim, variam-se os valores de  $p$ ,  $q$ ,  $P$  e  $Q$  e utilizando-se como critério de seleção o AIC e o BIC para ajudar a escolher o “melhor” modelo. Na Tabela 5.10 apresentam-se os valores do AIC e do BIC dos modelos que são estacionários e invertíveis, uma vez que para muitos valores de  $p, q, P$  e  $Q$  os modelos respectivos eram não estacionários e/ou não invertíveis.

$(p, d, q) \times (P, D, Q)$	AIC	BIC
$SARIMA(1, 1, 4) \times (0, 1, 1)_{12}$	0,746028	-0,122935
$SARIMA(1, 1, 4) \times (1, 1, 0)_{12}$	1,084100	0,215137
$SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 4)_{12}$	<b>0,698105</b>	<b>-0,149019</b>
$SARIMA(1, 1, 0) \times (1, 1, 4)_{12}$	1,111387	0,244909

Tabela 5.10: Critérios de seleção, AIC e BIC aplicados nos modelos.

Analisando a Tabela 5.10, observa-se que o modelo  $SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 4)_{12}$  é o que possui um valor de AIC e de BIC mais pequeno e portanto escolhe-se este modelo. Note-se que foram identificados outros modelos com valores de AIC e de BIC menores mas que falhavam aquando da fase de avaliação do modelo. Com isto, termina-se a etapa de identificação do modelo e parte-se para a etapa de estimação dos parâmetros.

### Etapa de Estimação

Os estimadores apresentados são estimadores de máxima verosimilhança e foram obtidos computacionalmente,  $\phi_1 = -0,1494$ ,  $\theta_1 = -0,9868$ ,  $\Phi_1 = -0,4710$ ,  $\Theta_1 = -0,4081$ ,  $\Theta_2 = -0,5567$ ,  $\Theta_3 = 0,1506$  e  $\Theta_4 = -0,1858$ .

Assim  $Z_t$  é modelada por um  $SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 4)_{12}$  cuja expressão é dada por

$$\phi(B)\Phi(B^{12})(1-B)(1-B^{12})Z_t = \theta(B)\Theta(B^{12})\varepsilon_t$$

com  $\phi(B) = 1 + 0,1494B$ ,  $\Phi(B) = 1 + 0,4710B^{12}$ ,  $\theta(B) = 1 + 0,9868B$  e  $\Theta(B^{12}) = 1 + 0,4081B^{12} + 0,5567B^{24} - 0,1506B^{36} + 0,1858B^{48}$ .

Repare-se que a estimativa do coeficiente  $\theta_1$  é em módulo muito próximo de 1 e portanto deve-se ter este facto em atenção na avaliação do modelo. Contrariamente, não há nenhuma estimativa próxima de zero o que revela que apesar de termos um modelo com muitos coeficientes, todos eles são significativos. Todas estas avaliações vão ser feitas de seguida.

## **Etapas de Avaliação**

Nesta etapa verifica-se se o modelo identificado e estimado é adequado, e em caso positivo, pode utilizar-se para fazer previsões.

### *Avaliação da qualidade estatística*

Um das questões a ter em conta é a significância estatística dos parâmetros estimados. Como já se referiu anteriormente, nenhum deles é próximo de zero e portanto consideram-se todos os parâmetros significativos.

Outra questão a ter em conta é a estacionaridade e invertibilidade do modelo  $SARIMA(1,1,1) \times (1,1,4)_{12}$ , que tal como verificamos anteriormente este é estacionário. Também ao calcular-se as raízes dos polinómios  $\phi(B) = 1 + 0,1494B$ ,  $\Phi(B) = 1 + 0,4710B^{12}$ ,  $\theta(B) = 1 + 0,9868B$  e  $\Theta(B^{12}) = 1 + 0,4081B^{12} + 0,5567B^{24} - 0,1506B^{36} + 0,1858B^{48}$  verifica-se que as raízes estão todas fora do círculo unitário, ou seja são todas superiores ao valor 1, o que corrobora com a ideia de estacionaridade e de invertibilidade do modelo.

Também é importante verificar a estabilidade do modelo. Tal é verificado se a correlação existente entre os estimadores obtidos não for em módulo superior a 0,7. Seguidamente, apresenta-se a matriz de correlação dos estimadores dos parâmetros.



$$\begin{bmatrix} 1 & -0.3205 & -0.1146 & 0.0406 & -0.0414 & -0.1290 & 0.1199 \\ -0.3205 & 1 & -0.0067 & -0.0212 & 5.5881 \times 10^{-4} & 0.1602 & -0.1056 \\ -0.1146 & -0.0067 & 1 & -0.0291 & 0.6767 & 0.4627 & -0.3124 \\ 0.0406 & -0.0212 & -0.0291 & 1 & -0.1823 & -0.4818 & 0.2910 \\ -0.0414 & 5.5881 \times 10^{-4} & 0.6767 & -0.1823 & 1 & 0.3090 & -0.3192 \\ -0.1290 & 0.1602 & 0.4627 & -0.4818 & 0.3090 & 1 & -0.4186 \\ 0.1199 & -0.1056 & -0.3124 & 0.2910 & -0.3192 & -0.4186 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como se pode ver pelos valores das entradas da matriz anterior, a correlação existente é moderada, o que permite concluir que o modelo é estável.

#### *Avaliação da qualidade de ajustamento*

Após se verificar a qualidade estatística do modelo é necessário verificar se os resíduos do modelo estimado comportam-se como um ruído branco, isto é, se suas autocorrelações são não significativas. Para se verificar tal comportamento, analisa-se a FAC dos resíduos estimados, Figura 5.22. Também nessa figura pode-se verificar as probabilidades críticas do teste de Ljung-Box.

Como se pode observar, ambos os resultados revelam que os resíduos do modelo estimado têm comportamento de um ruído branco.

O uso do teste de Box-Pierce reforça essa afirmação, uma vez que se obtém um *p.value* de 0,9140. Considerando o nível de significância de  $\alpha = 0,05$ , como o *p.value* é superior a esse valor, não há razões para rejeitar a hipótese de não correlação dos resíduos e portanto não há razões para se rejeitar a ideia de ruído branco.

Além de se verificar que os resíduos do modelo estimado têm o comportamento de um ruído branco, é necessário verificar se estes têm distribuição normal. Pelo Q-Q Plot dos resíduos da Figura 5.22, pode-se verificar que existem alguns pontos do gráfico que se afastam da reta de declive um e cuja a ordenada na origem é zero. Contudo, a maior parte dos pontos concentra-se em torno dela, o que evidencia que os resíduos

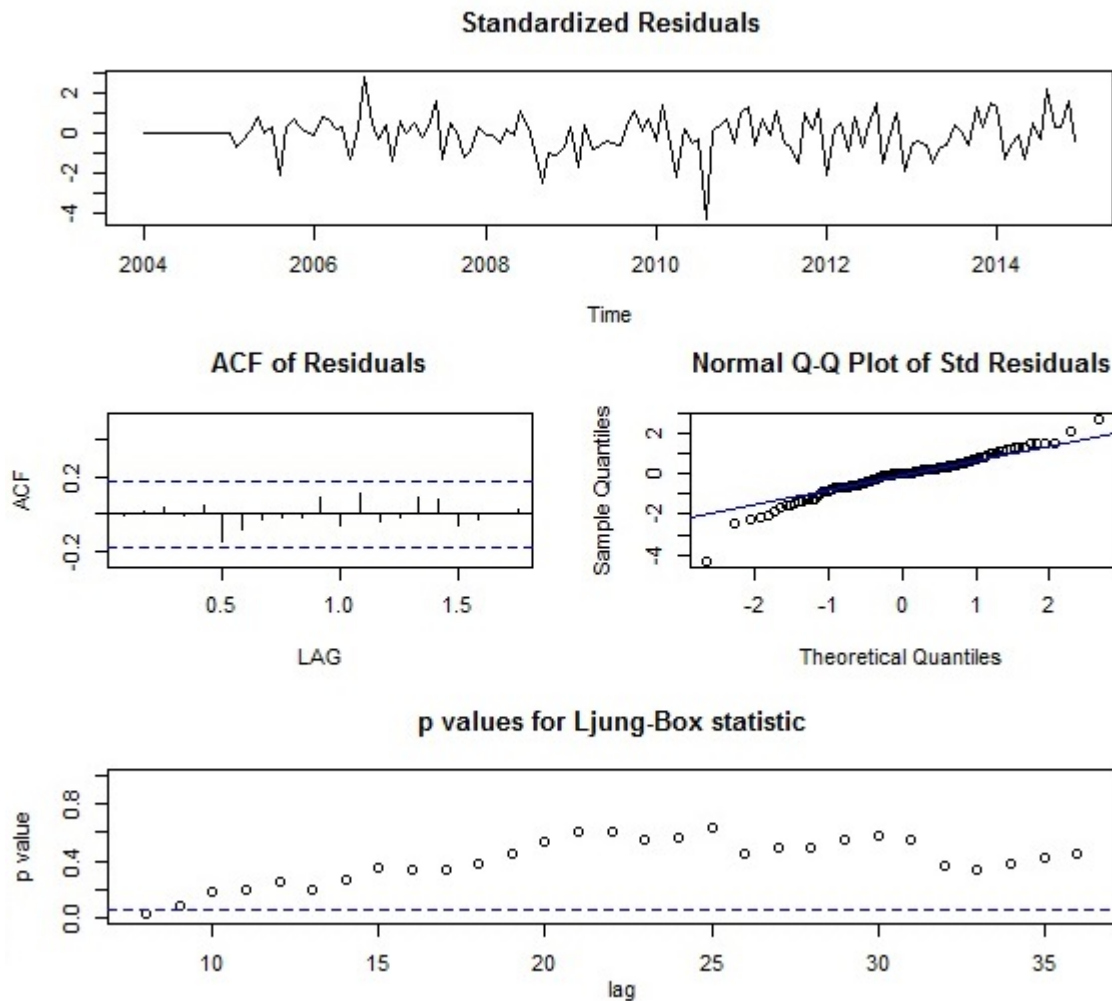


Figura 5.22: FAC dos resíduos, teste de Ljung Box e Q-Q Plot.

têm distribuição normal.

Para aferir com mais certeza acerca da distribuição dos resíduos, efetua-se o teste de Kolmogorov-Smirnov, para testar a normalidade. Ao efetuar-se o teste, obtém-se um  $p - value$  de 0,1684 que é maior que o nível de significância  $\alpha = 0,05$  e portanto não há razões para se rejeitar que  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ .

Como a avaliação da qualidade estatística e de ajustamento do modelo  $SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 4)_{12}$  foi positiva, poder-se-a agora efetuar a previsão. Na Figura 5.23 apresenta-se a vermelho a previsão desde janeiro de 2015 até dezembro de 2015 dos dados logarit-

mizados, e a azul os limites do intervalo de previsão a 95% de confiança.

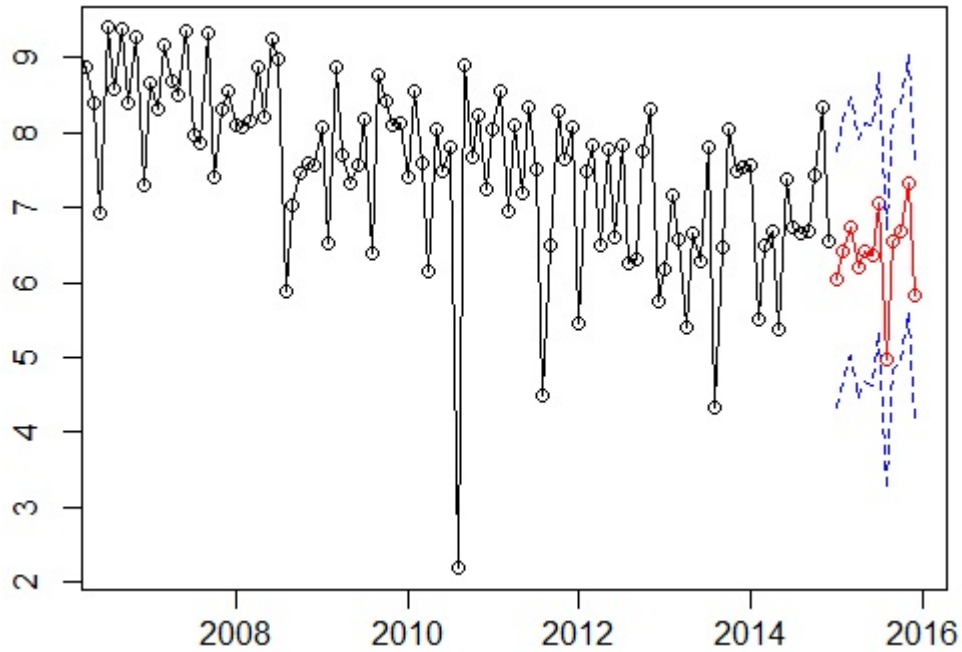


Figura 5.23: Representação da previsão obtida dos próximos 12 meses pelo método de Box e Jenkins para os dados transformados.

Após obter a previsão para a série do logaritmo do faturado do perfil A333 é necessário obter a previsão para a série do faturado do perfil em questão. Para isso, aplica-se somente a exponencial à previsão obtida dos dados logaritmizados, uma vez que se obtém um EQM menor do que quando se obtém a previsão através da equação (3.6).

Na Tabela 5.11 apresentam-se os valores previstos para a série do faturado do perfil A333 desde janeiro de 2015 até julho de 2015, bem como os valores reais do faturado nesses meses.

Como se pode ver na tabela, a faturação dos meses de janeiro e de maio foi satisfatoriamente prevista enquanto que a previsão obtida nos meses de fevereiro, abril e julho foram desastrosas.

Meses	Previsão da sucessão $Z_t$	Previsão da sucessão $F_t$	Dados reais
Janeiro	6,03	417,54	384,1
Fevereiro	6,43	619,31	86,7
Março	6,74	843,00	1044,9
Abril	6,19	489,37	88,1
Maio	6,41	610,43	587,3
Junho	6,35	574,56	104,2
Julho	7,07	1170,65	2624,2

Tabela 5.11: Previsão obtida para os dados logaritmizados, para os dados originais e valores reais do faturado desde janeiro de 2015 até julho de 2015.

### 5.3.2 Modelação automática de um ARIMA

Para se obter o modelo automático usou-se a função *auto.arima()*. No entanto aplicou-se a função aos dados logaritmizados, uma vez que os dados originais têm muita variabilidade.

A função automática retornou o modelo  $SARIMA(0, 1, 2)(0, 0, 1)_{12}$ , cujas estimativas dos coeficientes são dadas por  $\hat{c} = -0.014$ ,  $\hat{\theta}_1 = -1,1382$ ,  $\hat{\theta}_2 = 0.1770$  e  $\hat{\Theta}_1 = 0,3102$ .

Como se pode ver, um dos coeficientes do polinómio de médias móveis,  $|\theta_1| > 1$  e portanto o modelo em questão não é invertível. Também ao calcular as raízes do polinómio  $\theta(B) = 1 + 1.1382B - 0.1770B^2$ , obtém-se as raízes: 0,781104 e 6,331549. Uma das raízes obtidas não está fora do círculo unitário, ou seja, é em módulo inferior a 1 e portanto o modelo não é invertível. É de observar que, Hyndman e Athanasopoulos[17] criaram a função *auto.arima()* para retornar o melhor modelo ARIMA, tendo em conta a exigência de estacionaridade e a minimização do valor do AIC e BIC

Sendo assim, o modelo indicado apesar de estacionário não é invertível. Note-se que o modelo obtido apenas considera ser necessário fazer uma diferenciação simples

para tornar a série estacionária.

Ao fazer o teste ADF e o teste KPSS nos dados apenas logaritmizados, obtém-se nos dois testes a rejeição da hipótese de estacionaridade. O que já se esperava, pois ao analisar-se a Figura 5.16, verifica-se uma tendência decrescente.

No entanto, ao fazer-se os testes nos dados logaritmizados e com uma diferenciação simples, obtém-se os *p.values* de 0,01 e 0,1, respetivamente. Ao considerar-se o nível de significância  $\alpha = 0,05$ , para o primeiro teste, rejeita-se a hipótese nula de não estacionaridade. E no teste KPSS conclui-se que não há razões para se rejeitar a hipótese nula de estacionaridade. Sendo assim, a série é estacionária e não há razões para se proceder a mais nenhuma diferenciação.

Note-se que o modelo identificado pela função, também só considera uma diferenciação simples para a estacionarizar e apesar de não considerar necessária a diferenciação sazonal considera a componente sazonal, tal como sugere a Figura 5.19.

Quando se considera o modelo  $SARIMA(0, 1, 2)(0, 0, 1)_{12}$ , obtém-se um AIC de 0,9198857 e o BIC de 0,0072433. Comparando estes valores com os da Tabela 5.10, observa-se que o AIC e o BIC do modelo sugerido pela função *auto.arima()* é menor que o AIC e BIC de alguns modelos, que por sinal são modelos estacionários e invertíveis. No entanto esses valores são maiores do que o AIC e BIC modelo escolhido na secção anterior.

Como o modelo sugerido não é invertível, e quebra um dos pressupostos para se prosseguir para a previsão então não se efetua a previsão e para este perfil não se considera o modelo ARIMA automático.

### 5.3.3 Método de Alisamento Exponencial para a série do faturado do perfil A333

Nos modelos de Alisamento Exponencial é importante observar as componentes a incluir no modelo. Como se pode observar pela Figura 5.16 e como se referiu anteri-

ormente, a componente tendência e a componente sazonal estão presentes na série do faturado do perfil em estudo. No entanto, neste tipo de modelos é importante saber se estamos perante uma componente sazonal aditiva ou multiplicativa, o que nos modelos ARIMA não tinha relevância.

Observando-se a Figura 5.19, verifica-se sazonalidade aditiva, no entanto, a decomposição observada nessa figura era relativamente à série logaritmizada que possui uma variabilidade menor e as oscilações já não são tão acentuadas. Observando-se a Figura 5.16, verifica-se que as oscilações são maiores até 2009, sendo que depois deste ano estas diminuem a sua amplitude, o que sugere uma componente sazonal multiplicativa. Portanto, o mais indicado é fazer a decomposição STL dos dados do faturado do perfil A333 para verificar o tipo da sazonalidade existente.

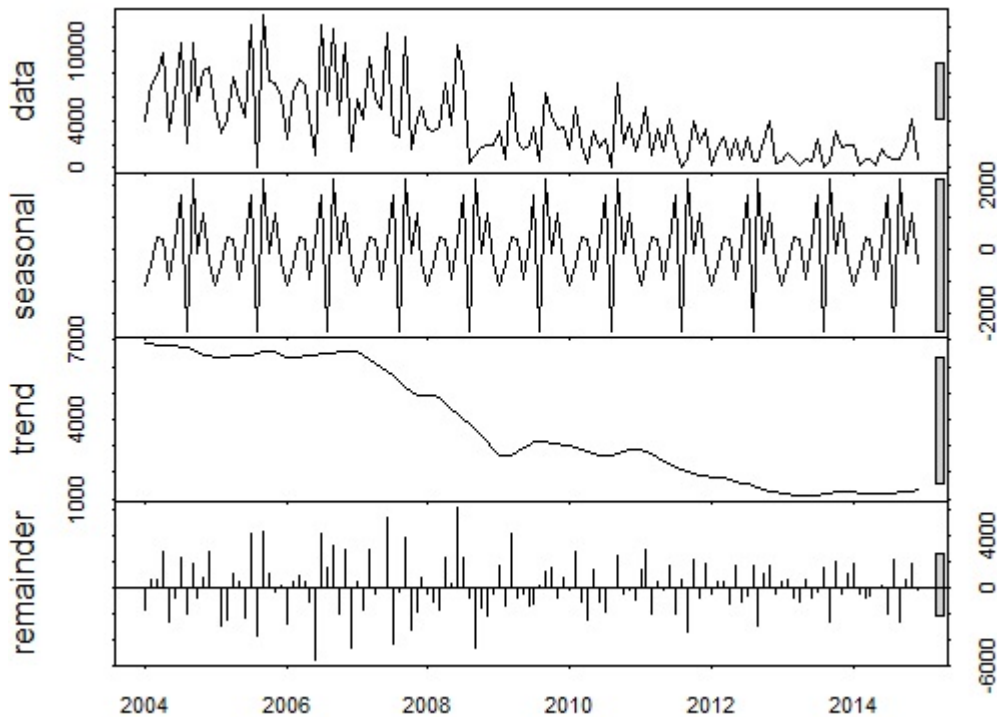


Figura 5.24: Decomposição STL da série do faturado do perfil A 333.

Como se pode observar pela Figura 5.24 a sazonalidade parece ser aditiva, a ten-

dência é aproximadamente linear. Portanto, sugere-se o modelo de Alisamento Exponencial com tendência aditiva e sazonalidade aditiva, que se irá representar por  $(A,A)$ . Na literatura este modelo é conhecido por modelo de Holt-Winter aditivo.

### Estimação das Componentes

Nesta etapa, pretende-se estimar os parâmetros do modelo anterior. Neste caso é necessário estimar as constantes de amortecimento  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , que estão relacionadas, respetivamente, com o nível, tendência e sazonalidade e que são estimadas através da minimização da soma dos quadrados dos erros de previsão.

Estas constantes de alisamento, bem como os coeficientes, foram estimados utilizando a package *stats* do software *R*. Na Tabela 5.12 apresentam-se todas as estimativas obtidas.

$\alpha$	0,0414	$s_2$	-923,5396	$s_8$	-1965,0852
$\beta$	0,0082	$s_3$	-911,7317	$s_9$	-419,3899
$\gamma$	0,3360	$s_4$	-1179,8536	$s_{10}$	235,4419
$l_1$	1492,7013	$s_5$	-1208,5105	$s_{11}$	1079,1124
$b$	-38,1371	$s_6$	-541,1994	$s_{12}$	-734,9360
$s_1$	-1069,8191	$s_7$	-90,7592		

Tabela 5.12: Estimativa das componentes do modelo de Holt-Winter Aditivo.

### Estudo da Componente Residual

Após identificar um modelo, é importante verificar se esse modelo descreve bem ou não a sucessão em estudo. Para isso, tem de se verificar se os resíduos apresentam um comportamento de um ruído branco. Além disso, é vantajoso, mas não necessário, que os resíduos tenham uma distribuição normal.

Analisando os valores estimados da FAC e da FACP dos resíduos do modelo de

Holt-Winter aditivo aplicado à série do faturado, Figura 5.25, observa-se que os valores são muito pequenos e próximos de zero, verificando-se que os resíduos não possuem correlação significativa, o que é uma das características de um ruído branco. Para comprovar este facto, fez-se o teste de Box-Pierce e obteve-se um p-value de 0,6672 que é maior que o nível de significância considerado,  $\alpha = 0,05$ , pelo que o teste confirma a ideia de ruído branco.

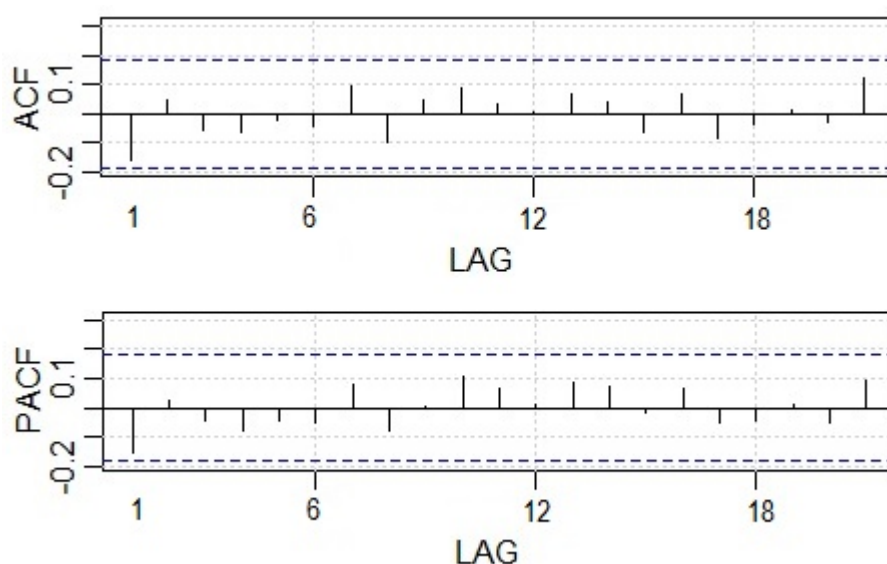


Figura 5.25: FAC e FACP da componente residual do modelo de Holt HINTER Aditivo aplicado à série do faturado do perfil A333.

Ao fazer-se o teste de Kolmogorov-Smirnov para testar a normalidade dos resíduos, obteve-se um p-value de 0,3370, o que confirma que não há razões para se rejeitar a normalidade. Assim, conclui-se que o modelo de Holt-Winter Aditivo poderá descrever bem a sucessão em estudo, podendo assim prosseguir para a etapa de previsão.

Na Figura 5.26 apresentam-se os valores previstos usando o modelo de Holt-Winter Aditivo  $(A,A)$ , para a série do faturado do perfil A333.



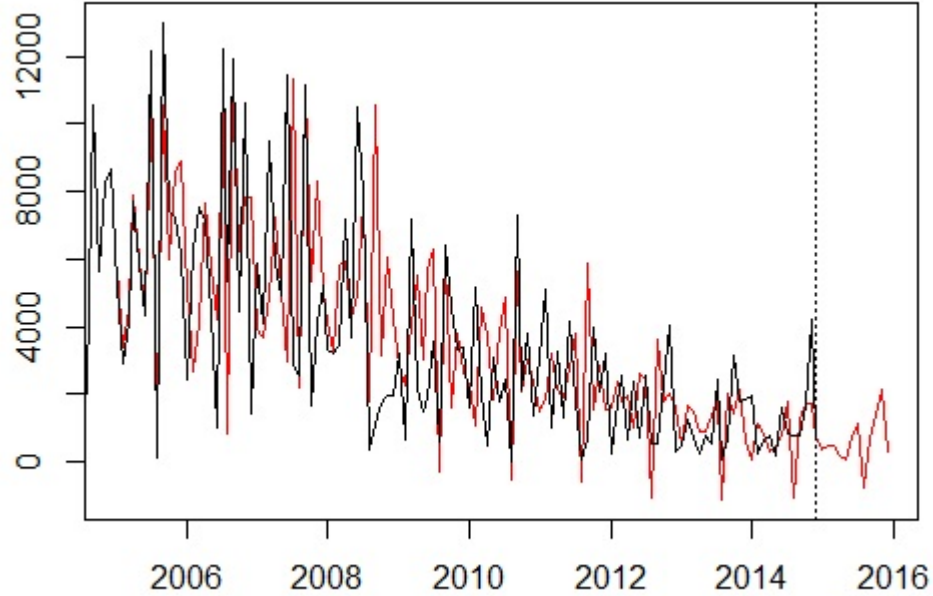


Figura 5.26: Representação das estimativas do faturado obtidas pelo modelo (A,A).

#### 5.3.4 Modelo ETS para a série do faturado do perfil A333

Nesta secção tenta-se modelar a sucessão por um modelo de espaço de estados, mas de forma automática. Ao usar a função *ets()* e ao considerar o argumento *model* desta função com *model="ZZZ"*, obtém-se o melhor modelo, tendo em conta a combinação dos fatores: erros, tendência e sazonalidade, que minimiza o valor do AIC e BIC.

Assim, obteve-se o modelo ETS(M,N,M), ou seja, um modelo de Espaço de Estados que considera que a série do faturado do perfil A333 não possui tendência mas possui sazonalidade multiplicativa e considera os erros multiplicativos. Na Figura 5.27 apresenta-se a decomposição que o modelo de espaço de estados considera para a sucessão temporal em questão e, como se pode ver, apesar deste não considerar tendência, considera a componente nível representada no segundo patamar da Figura 5.27. No último patamar está representada a componente sazonal que aparentemente parece aditiva, mas é considerada multiplicativa.

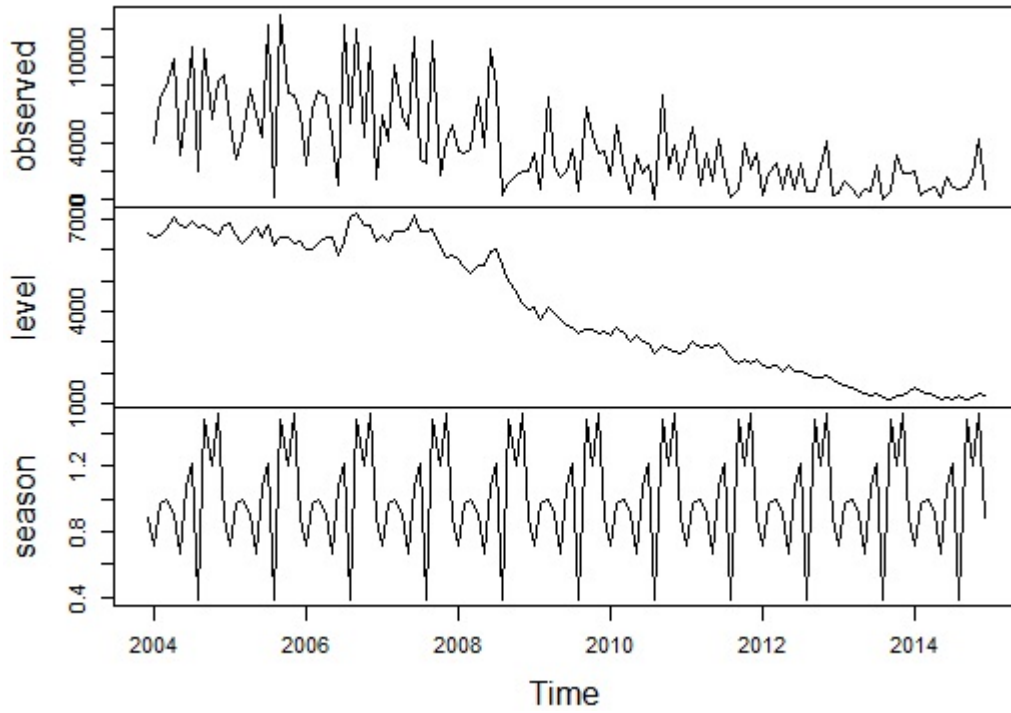


Figura 5.27: Decomposição pelo método ETS(M,N,M).

Na Tabela 5.13 são apresentadas as estimativas obtidas para os parâmetros de amortecimento e para os estados iniciais do modelo ETS(M,N,M).

$\alpha$	0,1046	$s_3$	1,1982	$s_8$	0,6627
$\gamma$	0,0001	$s_4$	1,4795	$s_9$	0,9072
$l_1$	6504,3071	$s_5$	0,3891	$s_{10}$	0,9983
$s_1$	0,8846	$s_6$	1,2168	$s_{11}$	0,9678
$s_2$	1,5154	$s_7$	1,0674	$s_{12}$	0,7129

Tabela 5.13: Estimativa dos parâmetros e dos estados iniciais do modelo ETS(M,N,M).

## Estudo da Componente Residual

Após se obter as estimativas para os parâmetros de amortecimento e para os estados iniciais do modelo ETS(M,N,M), é necessário verificar se os resíduos se comportam como um ruído branco. Para tal, representa-se na Figura 5.28 a FAC e a FACP estimada dos resíduos.

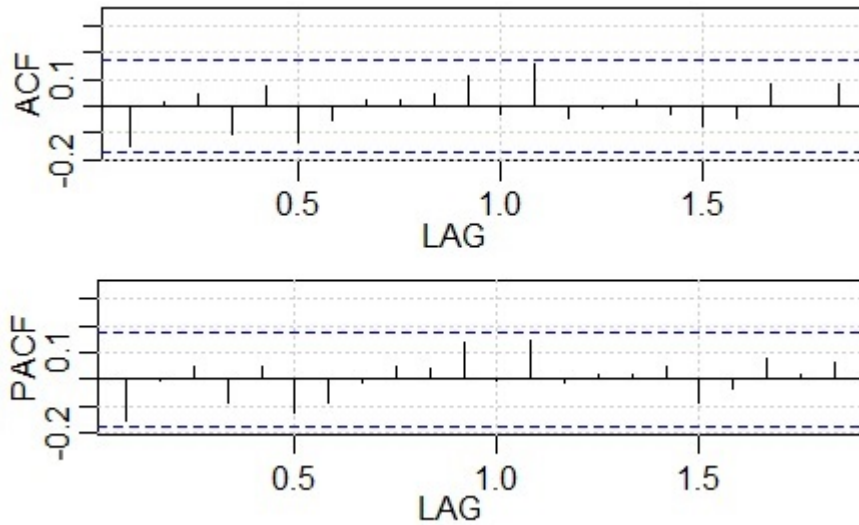


Figura 5.28: FAC e FACP da componente residual do modelo ETS(M,N,M).

Como se pode analisar pela Figura 5.28, os valores são muito baixos e próximos de zero e portanto os resíduos não possuem correlação significativa, uma das características de um ruído branco. Para ter a certeza desta característica, efetua-se o teste de Box-Pierce. Para este teste obteve-se um *p.value* de 0,5508, o que corrobora com a ideia de ruído branco.

Outro comportamento importante a verificar é a normalidade dos resíduos. Para tal, efetuou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov obtendo-se um *p.value* de 0,1488 o que nos indica que não há razões para rejeitar a normalidade. Assim, pode concluir-se que  $\varepsilon_t \sim RBN(0, 0.3)$  e portanto pode-se considerar o modelo ETS(M,N,M) adequado.

Posto isto, foi feita a previsão e obteve-se, além das previsões pontuais, o intervalo

de previsão a 80% e a 95% de confiança. Na Figura 5.29 representam-se os valores previstos, bem como os intervalos de previsão considerados.

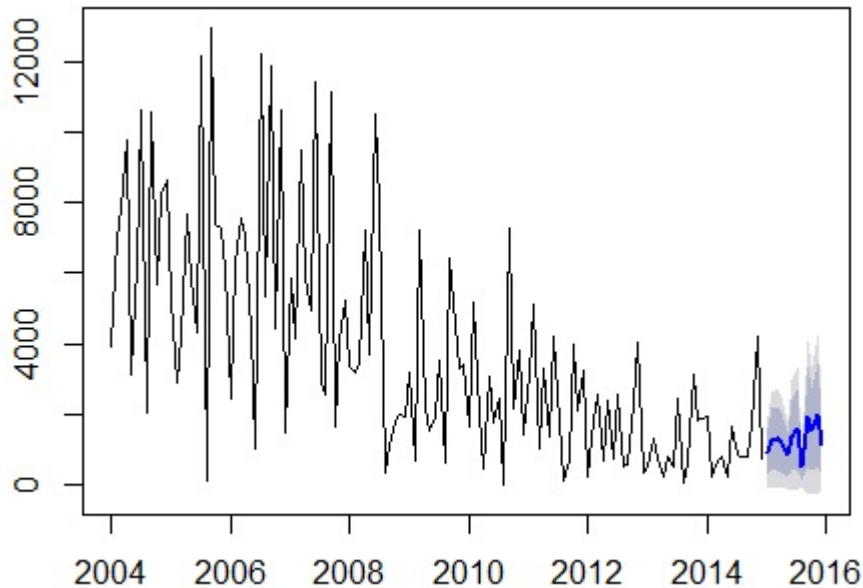


Figura 5.29: Representação da previsão do ano de 2015 considerando o modelo ETS(M,N,M) e do intervalo de confiança a 80% e a 95% de confiança.

Ao analisar a Tabela 5.14, que contém os valores reais do faturado do perfil A333 nos meses de janeiro até julho e as previsões obtidas para esses meses, pode-se afirmar que os valores estão muito afastados, com exceção dos meses de março e maio que estão relativamente próximos. Relativamente aos intervalos de confiança a 95%, verifica-se que todos possuem o limite inferior negativo. Como estamos a fazer a previsão para o faturado não faz sentido considera-lo negativo, uma vez que quanto muito o faturado pode tomar o valor de zero. Mesmo assim, os I.C a 95% possuem uma amplitude muito grande, o que não dá uma grande clareza acerca da previsão do faturado.

Como era de se esperar os I.C a 80% já têm uma amplitude menor, no entanto nos meses de fevereiro, abril e junho os I.C não contêm o valor real do faturado.

Meses	Dados reais	Previsão ETS(M,N,M)	I.C no nível de 95%	I.C no nível de 80%
Janeiro	384,1	924,13	]−74, 64; 1922, 92[	]271, 07; 1577, 20[
Feveiro	86,7	1254,39	]−110, 95; 2619, 74[	]361, 64; 2147, 15[
Março	1044,9	1293,99	]−124, 36; 2712, 35[	]366, 58; 2221, 41[
Abril	88,1	1175,89	]−121, 97; 2473, 77[	]327, 27; 2024, 53[
Mai	587,3	859,1	]−95, 64; 1813, 85[	]234, 83; 1483, 37[
Junho	104,2	1383,52	]−164, 49; 2931, 52[	]371, 33; 2395, 70[
Julho	2624,2	1577,46	]−199, 45; 3354, 36[	]415, 60; 2739, 32[

Tabela 5.14: Tabela com os valores reais do faturado do perfil A333 desde janeiro até julho de 2015, bem como as previsões obtidas pelo modelo ETS(M,N,M) e os respectivos intervalos de confiança a 95% e a 80%.

### 5.3.5 Comparação de Resultados e Previsão da Série do Faturado do Perfil A 333

Nas subsecções anteriores identificaram-se vários modelos e efetuaram-se previsões para cada um deles. Na Tabela 5.15, apresentam-se os valores reais do faturado do perfil A 333 nos meses entre janeiro e julho de 2015, bem como os valores previstos do faturado para esses meses, pelos quatro modelos considerados anteriormente. Ou seja, do modelo obtido usando a metodologia Box e Jenkins ( $SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 4)_{12}$ ), usando os Modelos de Amortecimento Exponencial (Modelo  $(A, A)$ ) e usando a função automática de Hyndman para os modelos de Espaço de Estados ( $ETS(M, N, M)$ ).

Após efetuar a previsão para cada modelo é necessário escolher o modelo que melhor prevê. Para isso, calcula-se o EQM associado a cada modelo e escolhe-se o que conduz a um valor de EQM menor. Na Tabela 5.16 apresentam-se os resultados da avaliação da qualidade das previsões através do EQM.

Como se pode ver pela Tabela 5.16, o modelo que possui menor erro quadrático

Meses	Valores Reais	$SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 4)_{12}$	AES(A,A)	ETS(M,N,M)
<b>Janeiro</b>	384,1	417,5	384,74	924,13
<b>Fevereiro</b>	86,7	619,3	492,88	1254,39
<b>Março</b>	1044,9	843	466,56	1293,99
<b>Abril</b>	88,1	489,4	160,3	1175,89
<b>Maió</b>	587,3	610,43	93,51	859,1
<b>Junho</b>	104,2	574,56	722,67	1383,52
<b>Julho</b>	2624,2	1170,65	1134,98	1577,46

Tabela 5.15: Valores reais e previstos usando vários modelos para a série do faturado do perfil A 333.

Modelo	EQM
$SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 4)_{12}$	<b>403023,5</b>
AES(A,A)	478397,5
ETS(M,N,M)	815237,8

Tabela 5.16: EQM para os quatro modelos em estudo.

médio é o modelo obtido usando a metodologia de Box & Jenkins, ou seja, o modelo  $SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 4)_{12}$  e portanto deve ser este o modelo escolhido pela empresa, entre os modelos considerados, para usar na previsão. A Tabela 5.15 corrobora este facto, pois a sua análise mostra que as previsões mais próximas dos valores reais, de todos os modelos considerados, é realmente o modelo  $SARIMA(1, 1, 1) \times (1, 1, 4)_{12}$ . Ao usar este modelo obtiveram-se previsões próximas dos valores reais nos meses de janeiro, março e maio, no entanto, para os outros meses, os valores estão muito afastados. Portanto, apesar de ser o melhor de todos os modelos considerados, as previsões obtidas não são muito satisfatórias para alguns meses. Este desvio pode dever-se a fatores externos à empresa, como a crise económica que o país atravessa, e que não estão a ser considerados aquando a obtenção dos modelos.

## 5.4 Perfil B555

Nos perfis de alumínio anteriores, encontraram-se vários modelos que descrevem as séries em estudo. No entanto, interessa à empresa ter uma metodologia simples de modo a que qualquer funcionário consiga rapidamente obter a previsão do faturado de qualquer perfil de alumínio, pelo que se tenta sempre encontrar um modelo automático. Assim, para este perfil de alumínio, apenas se apresenta a modelação automática de um ARIMA.

Tal como se fez anteriormente, é usada a função *auto.arima()*, que retorna o melhor modelo ARIMA, tendo em conta o teste de raiz unitária e a minimização do valor do AIC e BIC. Portanto, após se identificar o modelo, basta verificar se os resíduos têm um comportamento de um ruído branco e se têm distribuição Normal.

Para se analisar o faturado do perfil B555, é necessário fazer a sua representação tal como indica a primeira imagem da Figura 5.30.

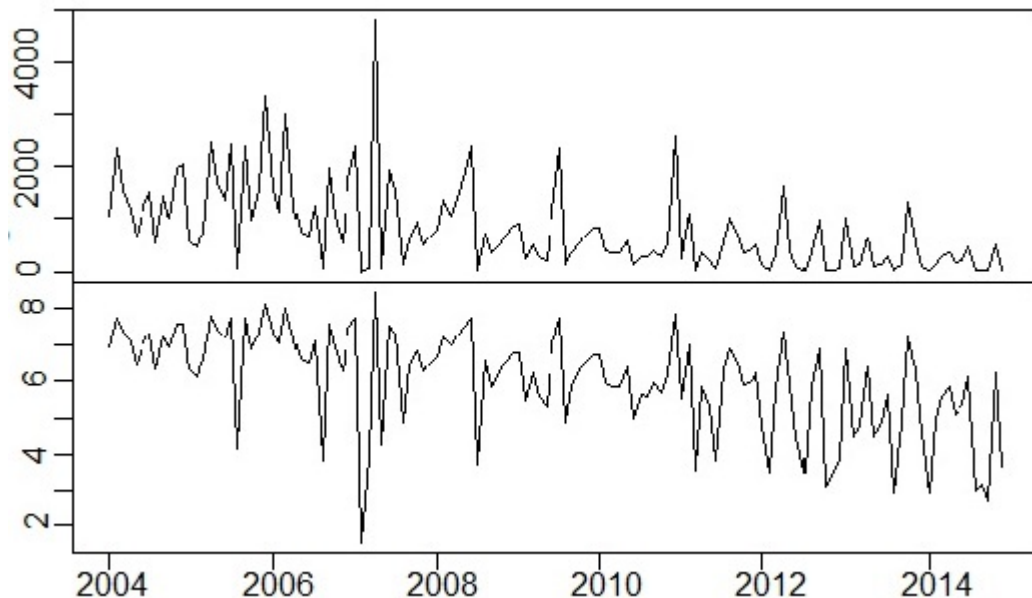


Figura 5.30: Cronograma do faturado do perfil B555 e cronograma da série do faturado logaritmizada, desde janeiro de 2004 até dezembro de 2014.

Como se pode ver, a série apresenta bastante variabilidade e portanto é necessário logaritmizar a série para se diminuir a variabilidade e só depois usar a função *auto.arima()*. A série logaritmizada está representada na Figura 5.30 no segundo patamar.

Assim, identificou-se o modelo *ARIMA*(2, 1, 1), cuja estimativas dos coeficientes são dadas por  $\phi_1 = -0.039$ ,  $\phi_2 = -0.2022$  e  $\theta_1 = -0.8851$ .

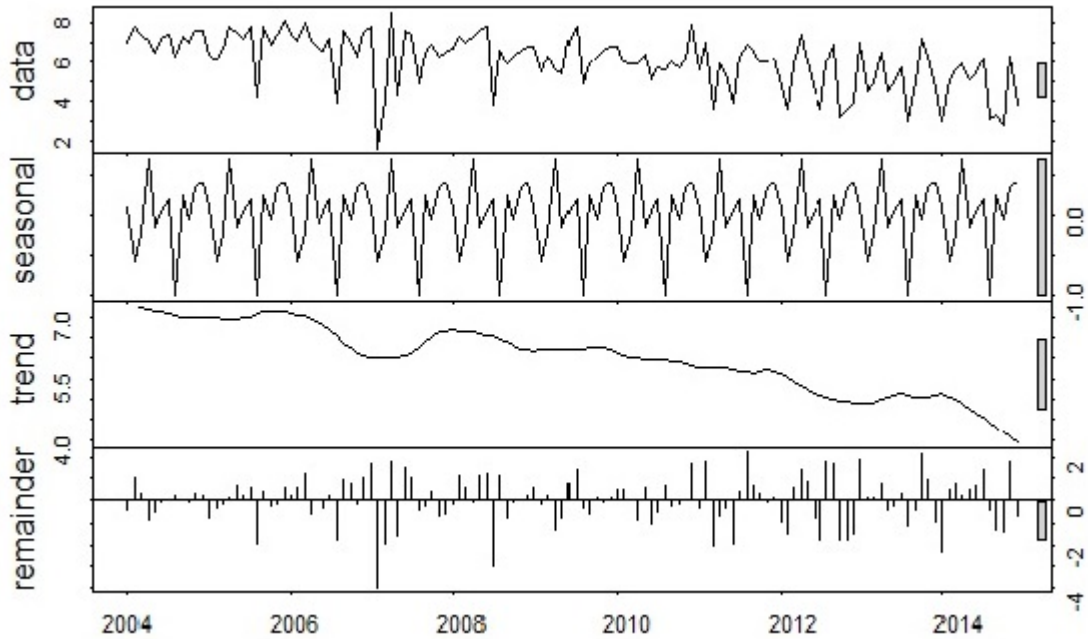


Figura 5.31: Decomposição STL da série logaritmizada.

Como se pode ver pela Figura 5.30 e pela Figura 5.31, a série transformada decresce gradualmente, pelo que podemos afirmar que possui tendência. Portanto, o modelo identificado pela função automática para a série logaritmizada vai de encontro com as figuras obtidas, uma vez que indica que é necessário efetuar uma diferenciação.

O modelo obtido automaticamente não considera a componente sazonal, uma vez que a função *auto.arima()* escolhe modelos parcimoniosos. No entanto, esta característica está presente quer na série do faturado, quer na série logaritmizada, Figura



5.31.

Após a identificação do modelo e a estimação dos parâmetros é necessário fazer apenas a avaliação da qualidade de ajustamento. Sendo assim, para se verificar se os resíduos têm um comportamento análogo a um ruído branco, representa-se na Figura 5.32 a FAC para os resíduos estimados, bem como o teste de Ljung-Box.

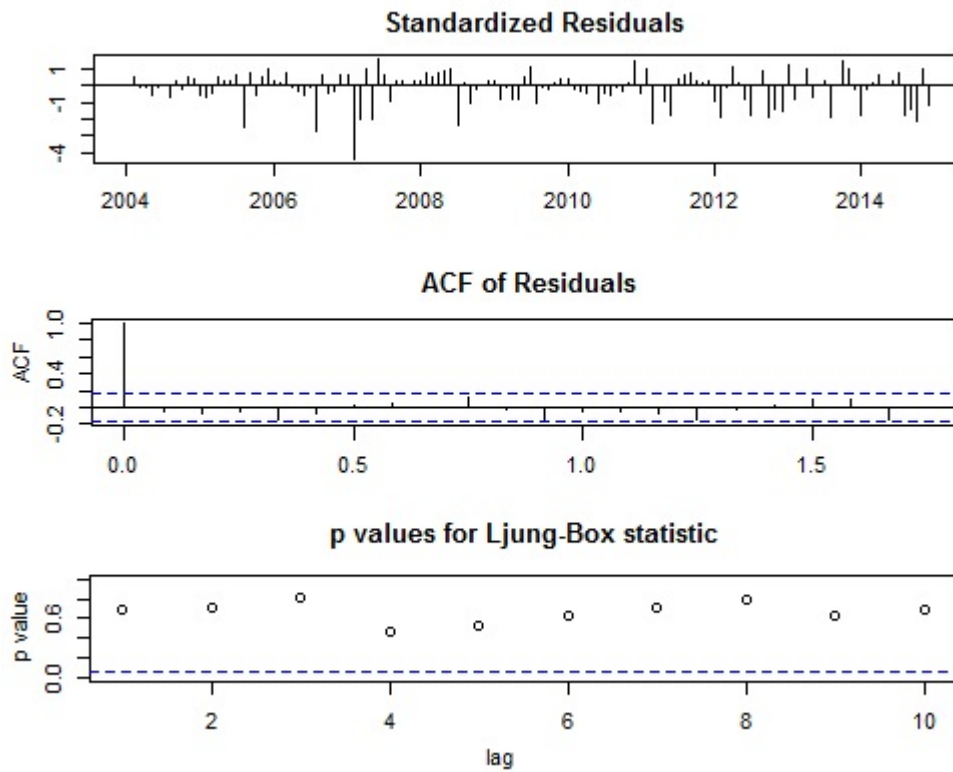


Figura 5.32: FAC dos resíduos e teste de Ljung-Box.

Como se pode observar, a FAC residual é aproximadamente nula em todos os “lags” considerados e os *p.values* obtidos pelo teste de Ljung-Box são superiores ao valor estabelecido para nível de significância 0,05, para todos os “lags”. Além disso, ao efetuar o teste de Box-Pierce, obteve-se um *p.value* de 0,735, maior que  $\alpha = 0,05$ , o

que reforça a ideia de que os resíduos têm um comportamento de ruído branco.

Além do comportamento de um ruído branco, os resíduos devem apresentar distribuição normal para se poder efetuar a previsão pela função *sarima.for()* da package *atsa*. Para verificar a normalidade é apresentado na Fig.5.33 o Q-Q Plot dos resíduos.

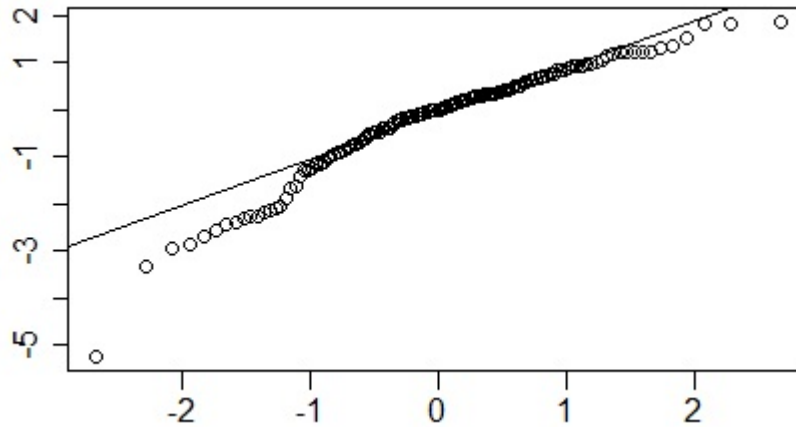


Figura 5.33: Q-Q Plot dos resíduos obtidos com o modelo ARIMA(2,1,1).

Como se pode observar na Figura 5.33, muitos dos pontos do gráfico concentram-se em torno da reta, no entanto existem outros pontos, principalmente os das caudas, que se encontram afastados e portanto não se consegue tirar grandes conclusões, levantando a suspeita de falta de normalidade.

Ao efetuar o teste de Kolmogorov-Smirnov, obtém-se um  $p.value = 0,04$  que é menor que o nível de significância  $\alpha = 0,05$  e portanto há razões para se rejeitar a normalidade, a este nível de significância. Sendo assim, não se pode efetuar a previsão, pelo menos usando a metodologia de Box e Jenkins e portanto a alternativa que se apresenta é a utilização do método de bootstrap na previsão e nos intervalos de previsão. Este método já não necessita de suposições, como a normalidade, para a obtenção de previsões e de intervalos de previsão.

### 5.4.1 Intervalos de Previsão Bootstrap para modelos ARIMA

Como se viu anteriormente, ao usar o modelo ARIMA(2,1,1) para modelar a série logaritmizada do faturado do perfil B555, os resíduos, apesar de não estarem correlacionados, não têm distribuição normal e portanto há necessidade de aplicar o método de Bootstrap.

Na secção 4.2 descreveu-se ao pormenor a metodologia usada para se obterem intervalos de previsão bootstrap para os modelos ARIMA(2,1,1).

Recorde-se que no primeiro passo se devem calcular os resíduos  $\hat{\varepsilon}_t$ , a partir de  $\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{\phi}_0 - (1 + \hat{\phi}_1)X_{t-1} - (\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_1)X_{t-2} + \hat{\phi}_2X_{t-3} + \hat{\theta}_1\varepsilon_{t-1}$ . Depois estes devem-se centralizar e reamostrar com reposição.

O passo seguinte é a construção da série bootstrap  $X_t^*$  através da expressão  $X_t^* = \hat{\phi}_0 + (1 + \hat{\phi}_1)X_{t-1}^* + (\hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_1)X_{t-2}^* - \hat{\phi}_2X_{t-3}^* + \hat{\varepsilon}_t^* - \hat{\theta}_1\hat{\varepsilon}_{t-1}^*$ . Com esta nova série  $(X_1^*, X_2^*, \dots, X_T^*)$ , obtém-se as novas estimativas de Yule Walker  $(\hat{\phi}_0^*, \hat{\phi}_1^*, \hat{\phi}_2^*, \hat{\theta}_1^*)$ .

Considerando as últimas  $p$  observações da série original e obtendo-se  $\hat{\varepsilon}_{T+k}^*$  a partir da função de distribuição  $\hat{F}_\varepsilon$ , determina-se o valor  $X_{T+k}^*$ . Repete-se este procedimento 1000 vezes e obtêm-se 1000 valores bootstrap futuros,  $\hat{X}_{T+k}^{*(1)}, \dots, \hat{X}_{T+k}^{*(1000)}$ . Ordena-se a amostra e determina-se o intervalo de confiança através dos quantis da função distribuição bootstrap  $\hat{X}_{T+k}^*$ . Ao calcular a média dos valores bootstrap futuros, obtém-se o valor pretendido da previsão  $\hat{X}_{T+k}^*$ .

Efetuada todo este procedimento para a série logaritmizada do faturado do perfil B555 e considerando o horizonte temporal de 7 meses, isto é  $k=7$ , obtiveram-se as previsões dos sete meses futuros, segunda coluna da Tabela 5.17. No entanto, pretende-se obter a previsão para a série do faturado do perfil B555 e portanto há a necessidade de transformar as previsões obtidas, tal como se fez anteriormente para os outros perfis de alumínio.

Teoricamente, deve-se obter a previsão para a série original, através da equação (3.6), no entanto, ao efetuar essa transformação verificou-se um EQM maior do que

fazendo apenas a transformação  $\exp^{Y_t(m)}$ . Além disso as previsões obtidas tendem todas para o infinito, o que não são bons indicadores para o faturado dos meses futuros. Assim, aplica-se somente a exponencial e obtém-se os valores apresentados na coluna três da Tabela 5.17.

Note-se que as expressões são recursivas e portanto o programa de previsão bootstrap, construído em R, torna-se computacionalmente pesado à medida que se considera uma amplitude cada vez maior ou que se aumenta o número de parâmetros do modelo considerado. Para este caso, o programa demorou apenas 16 segundos a executar.

Outra questão que se deve ter em conta é o facto do programa basear-se na reamostragem dos resíduos e portanto, a cada execução do programa obtém-se previsões diferentes, mas todas muito próximas. Na Tabela 5.17 apresenta-se apenas uma das previsões.

Meses	Valor previsto logaritmizado	Valor previsto transformado	Valor real	Intervalos bootstrap previsão
janeiro	2,3346	10,33	220,60	]0; 48836, 90[
fevereiro	2,8519	17,32	115,20	]0; 59040, 51[
março	3,1670	23,74	374,50	]0, 01; 11946, 08[
abril	3,0873	21,92	443,41	]0, 01; 13657, 96[
maio	2,9498	19,10	312,80	]0; 18070, 22[
junho	3,0196	20,48	91,10	]0; 15603, 6[
julho	3,0700	21,54	517,41	]0; 14702, 10[

Tabela 5.17: Comparação dos valores obtidos com os valores reais no Perfil B 555.

Na quinta coluna da Tabela 5.17 apresentam-se os intervalos bootstrap de previsão para os meses de janeiro a julho. Como se pode observar, estes têm uma grande amplitude pelo que não dão uma boa informação acerca da previsão. Também os valores previstos dos sete meses considerados estão muito afastados dos valores reais.

Na tentativa de se perceber o porquê de se obterem tão más previsões, testou-se o

programa de bootstrap na série do logaritmo do faturado do perfil A 080. Recorde-se que quando se efetuou a modelação automática na série do logaritmo do faturado do perfil A 080, foi também escolhido o modelo ARIMA(2,1,1). Portanto, o que se pretende fazer de seguida é usar a mesma metodologia, ou seja, o mesmo programa bootstrap, mas agora aplicado à série logaritmizada do faturado do perfil A 080. Assim pretende-se perceber se se continua obter valores muito afastados ou não e, além disso, perceber se a obtenção de maus resultados se deve a alguma falha na implementação do programa bootstrap de previsão.

### **Intervalos de Previsão Bootstrap aplicados na série do faturado do perfil A 080**

Visto que o modelo obtido na modelação automática, aplicada à série logaritmizada do faturado do perfil de alumínio A 080, é igual ao modelo usado anteriormente, pode-se usar o mesmo programa sem efetuar qualquer alteração, apenas necessitando de usar a série em questão.

Efetuando-se todos os passos e considerando um horizonte temporal de sete meses, obteve-se uma das previsões, segunda coluna da Tabela 5.18. Como se pretende obter a previsão para a série do faturado do perfil A 080, há necessidade de transformar as previsões obtidas, tal como se fez anteriormente, sendo os resultados apresentados na terceira coluna da Tabela 5.18.

Na quinta coluna da Tabela 5.18 apresentam-se os intervalos bootstrap de previsão para os meses entre janeiro e julho. Como se pode observar, estes têm uma grande amplitude, o que já acontecia nos intervalos de previsão obtidos anteriormente, não dando por isso uma boa informação acerca da previsão. Já os valores previstos para o faturado deste perfil de alumínio estão bem mais próximos dos valores reais, apesar de não serem uma boa aproximação das previsões.

Assim, pode-se concluir que o programa implementado não tem aparentemente nenhum erro e as más previsões obtidas anteriormente podem advir do facto do modelo

Meses	Valor previsto logaritmizado	Valor previsto transformado	Valor real	Intervalos bootstrap previsão
janeiro	6,5120	673,16	460,43	]1, 35; 249408, 60[
fevereiro	6,2517	518,92	807,91	]0, 42; 447474, 10[
março	6,4472	630,91	468,00	]2, 84; 141426, 60[
abril	6,4883	667,44	205,50	]2, 55; 118922, 90[
maio	6,4448	629,45	209,2	]1, 89; 163678, 10[
junho	6,4707	645,92	567,30	]1, 56; 142493[
julho	6,4729	647,34	1122,80	]1, 96; 160724, 30[

Tabela 5.18: Comparação dos valores obtidos com os valores reais no Perfil A 080.

que se está a considerar não estar a modelar corretamente a série e portanto não ser o melhor modelo a usar.

Visto que o modelo obtido para a previsão do faturado do perfil B555 faz uso da função automática que considera modelos parcimoniosos, e a série B555 apresenta características que não estão a ser consideradas no modelo ARIMA(2,1,1), como a sazonalidade, pode-se concluir que a série pode não estar a ser modelada corretamente. Sendo assim, o modelo ARIMA(2,1,1) não é um bom modelo que descreva a série em questão e deste facto advém o grande afastamento que as previsões têm em relação aos valores reais.

## Capítulo 6

### Conclusão

Com este trabalho pode-se concluir que a discussão sobre o tema em questão está longe de estar esgotada. São inúmeros os modelos e inúmeras metodologias que existem para a obtenção de previsões. Começo esta dissertação, dizendo que para se obter valores futuros é necessário olhar-se e estudar-se o passado e é isso que faço ao longo desta dissertação. Estudo e analiso o faturado de três perfis de alumínio com vista a encontrar um modelo que descreva e se adeque às séries temporais em questão.

Nesta dissertação começou-se por apresentar modelos para Séries Temporais Estacionárias tais como:  $AR(p)$ ,  $MA(q)$  e  $ARMA(p,q)$  e modelos para Séries Temporais não Estacionárias, tais como:  $ARIMA(p,d,q)$  e  $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)$ . A metodologia usada para se efetuar a previsão considerando os modelos ARIMA foram, o Método de Box e Jenkins e o Método Automático.

Seguidamente apresentou-se o procedimento para a obtenção de intervalos de previsão usando a metodologia Box e Jenkins. Este exige que os resíduos tenham uma distribuição normal, no entanto, nem sempre isso acontece, como foi visto no Perfil A333 na modelação automática. Em alternativa apresentou-se a obtenção de intervalos de previsão com base no método de reamostragem bootstrap, que não exige esse pressuposto.

Posteriormente apresentaram-se outros modelos de previsão, através dos Métodos de Alisamento Exponencial e modelos de Espaço de estados.

Todos estes modelos foram aplicados a três perfis de alumínio da empresa Extrusal, sendo o principal objetivo desta dissertação, a obtenção dos modelos que melhor prevêem o faturado dos perfis de alumínio. Para todos os perfis foi necessário a logaritmização, uma vez que a série é não estacionária em variância, por isso após se prever o faturados nos meses de janeiro a julho há a necessidade de efetuar a exponencial nos valores obtidos, para se obter a previsão do faturado para os perfis de alumínio. É tendo em conta o valor obtido após a exponencial que faz-se a comparação com os valores reais.

Para o perfil A 080 foi identificado o modelo  $SARIMA(0, 0, 1)(0, 0, 1)_{12}$ , através da metodologia de Box e Jenkins. Este modelo foi identificado através da análise da FAC e FACP, dos testes de raízes unitárias (para analisar a estacionaridade) e com o auxílio dos critério de seleção AIC e BIC, de valores, 0,672486 e -0,261996, respetivamente, escolheu-se este modelo. Após a avaliação satisfatória do modelo, partiu-se para a previsão. Os valores previstos para os meses de janeiro a julho não estão muito longe do que realmente foi faturado, com exceção dos meses de abril e maio.

Seguidamente, identificou-se com o auxílio do R, um modelo ARIMA automático,  $ARIMA(2, 1, 1)$ . Este modelo foi obtido através da função *auto.arima()*, que retorna o melhor modelo ARIMA tendo em conta o teste de raiz unitária e a minimização do valor do AIC e de BIC, 0,6683045 e -0,2443379, respetivamente.

Após a avaliação satisfatória do modelo, partiu-se para a previsão, onde a faturação dos meses de janeiro, março e maio foram satisfatoriamente prevista enquanto que a referente a fevereiro, abril e julho foram desastrosas.

Comparando os valores de AIC e de BIC do modelo anterior com os do modelo obtido automático, observou-se que o valor de AIC é menor no modelo automático, já o BIC é menor no modelo anterior. Deste modo obteve-se valores previstos mais próximos dos reais nos meses de janeiro, março abril e maio no modelo  $ARIMA(2, 1, 1)$  e mais próximo dos reais nos meses de fevereiro, junho e julho no



modelo  $SARIMA(0, 0, 1)(0, 0, 1)_{12}$ .

No perfil A 080 também se identificou um modelo usando a Metodologia de Alisamento Exponencial. Começou-se por considerar dois modelos sem tendência mas num considerou-se sazonalidade aditiva, modelo (N,A) e noutro considerou-se sem sazonalidade, modelo (N,N). Após a avaliação satisfatória da componente residual, partiu-se para a previsão onde os valores previsto pelo modelo (N,N) são iguais para todos os meses, o que já se esperava. Comparando o previsto com os valores reais, apercebeu-se que nos meses de abril, maio e junho as previsões obtidas nos dois modelos estão longe dos valores reais, já no mês de junho obteve-se previsões bastante próximas.

Para se obter um modelo ETS de Espaço de Estados automaticamente, usou-se a função  $ets(dados, model = "ZZZ")$  que nos indicou o modelo ETS(M,N,M), isto é, um modelo sem tendência, mas com erros e sazonalidade multiplicativa. Após a avaliação satisfatória da componente residual, obteve-se a previsão e os intervalos de previsão a 80% e a 95% de confiança. Relativamente às previsões, obteve-se nos meses de abril e maio uma grande discrepância entre a faturação prevista e a real, já nos meses de janeiro e julho já existe bastante proximidade. Quanto aos intervalos de previsão obtidos, observou-se que os de 95% têm os limites inferiores negativo, o que no contexto do problema não faz sentido e portanto os limites inferiores foram considerados nulos. Já os I.C a 80% são uma grande alternativa que a empresa uma vez que todos os valores reais do faturado pertencem a esse intervalo e ainda têm uma amplitude menor que os I.C a 95%.

Usando o EQM como critério de seleção do modelo que melhor prevê, obteve-se o modelo (N,A), isto é, modelo de Amortecimento Exponencial sem tendência e com sazonalidade aditiva e portanto será este o modelo que a empresa deve utilizar para obter a previsão do faturado para o Perfil A 080.

Para o perfil de alumínio A 333 foi identificado o modelo  $SARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 4)_{12}$ , através da metodologia de Box e Jenkins. Através da análise das FAC e FACP, e dos testes de raízes unitárias, identificou-se um modelo que não era invertível, portanto

fez-se variar os valores de  $p$ ,  $q$ ,  $P$  e  $Q$  e com o auxílio dos critérios de seleção AIC e BIC de valores 0,698105 e -0,149019, respectivamente, escolheu-se este modelo.

Após a avaliação satisfatória do modelo, partiu-se para a previsão em que se obteve uma faturação prevista muito próxima da faturação real nos meses de janeiro e maio, mas muito desastrosa nos meses de fevereiro e abril.

Seguidamente, identificou-se com o auxílio do R, um modelo ARIMA automático,  $SARIMA(0, 1, 2)(0, 0, 1)_{12}$ . Este modelo foi obtido através da função *auto.arima()*, que retorna o melhor modelo ARIMA tendo em conta a exigência de estacionaridade e a minimização do valor do AIC e BIC. No entanto, ao fazer-se a avaliação do modelo reparou-se que o modelo identificado apesar de ser estacionário, não é invertível quebrando um dos pressupostos para se prosseguir para a previsão. Sendo assim, para este perfil de alumínio não se considerou um modelo ARIMA automático.

Posteriormente, usou-se os métodos de Alisamento Exponencial, identificando-se o modelo (A,A), modelo com tendência aditiva e sazonalidade aditiva. O modelo considerado satisfaz todos os pressupostos da avaliação e portanto partiu-se para a etapa de previsão, onde se observou uma grande proximidade das previsões em relação aos dados reais, no mês de janeiro e um grande afastamento nos restantes meses.

Também se identificou um modelo ETS de Espaço de Estados, através da função *ets(dados, model = "ZZZ")* que nos indicou o modelo ETS(M,N,M), modelo sem tendência, mas com erros e sazonalidade multiplicativa. Após a avaliação satisfatória da componente residual, obteve-se a previsão e os intervalos de previsão a 80% e a 95% de confiança. As previsões obtidas com este modelo estão muito afastadas do valor real, em que nos meses de fevereiro, abril e junho a discrepância é muito grande, já para os meses de março e maio já existe alguma proximidade.

Quanto aos intervalos de previsão obtidos, observou-se que os de 95% têm os limites inferiores negativo, o que no contexto do problema não faz sentido e portanto os limites inferiores foram considerados nulos, além disso estes intervalos tinham uma amplitude muito grande. Já os I.C a 80% tinham uma amplitude menor, no entanto em alguns

meses, estes não contém o valor real do faturado.

Usando o EQM como critério de seleção do modelo que prevê melhor, obteve-se o modelo  $SARIMA(1, 1, 1)(1, 1, 4)$ , obtido com a metodologia Box e Jenkins. Sendo assim, será este o modelo que a empresa deve utilizar para obter a previsão do faturado para o Perfil A 333.

Para o perfil de alumínio B 555 apenas apresentou-se a metodologia ARIMA automática, uma vez que à empresa interessa ter uma metodologia simples, acessível e rápida. Através do R obteve-se o modelo  $ARIMA(2, 1, 1)$ . Através da análise aos resíduos percebeu-se que o pressuposto da normalidade dos resíduos falha e portanto não se pode prosseguir para a etapa da previsão, pelo menos usando a metodologia de Box e Jenkins. Em alternativa usou-se o método de bootstrap na previsão e nos intervalos de confiança, uma vez que este método já não necessita do pressuposto da normalidade.

Após se efetuar todo o procedimento descrito na secção 3.6.2, obteve-se umas previsões muito afastadas dos valores reais. Na tentativa de se perceber o porquê de tão más previsões, testou-se o programa de bootstrap na série logaritmizada do faturado do perfil A 080, uma vez que foi considerado o mesmo modelo ARIMA automático.

Assim, para o Perfil A 080 obteve-se intervalos de previsão de grande amplitude, o que já acontecia anteriormente, mas as previsões já estão próximas dos valores reais, apesar de não serem previsões melhores que as encontradas anteriormente. Sendo assim, concluiu-se que o programa implementado não tem nenhum problema aparente e as más previsões podem advir do facto do modelo que se está a considerar não estar a modelar corretamente a série. Note-se que a função automática considera modelos parcimoniosos e o perfil B 555 apresenta características que não estão a ser consideradas no modelo  $ARIMA(2, 1, 1)$ .

Comparando as previsões de todos os perfis de alumínio com os valores reais do faturado, apercebeu-se que infelizmente os resultados não foram satisfatórios, uma vez que em muitas situações não conduziram a boas previsões, de acordo com a compara-

ção feita através da amostra teste. Este facto pode advir de outros fatores externos à empresa, como problemas económicos pelos quais muitos dos clientes da Extrusal possam estar a passar e que influenciam os pedidos.

Também se percebeu que os valores previstos para o mês de abril, em todos os modelos de todos os perfis de alumínio, estão sempre bastante afastados dos valores reais. Tal como referi anteriormente, este facto pode advir de algum fator externo à empresa que tenha influenciado as quedas dos pedidos dos clientes da Extrusal.

Assim, propõem-se algumas formas de contornar este problema. A primeira é a utilização de métodos mistos, isto é, a utilização de vários estimadores obtidos através de diferentes modelos os quais poderiam ser devidamente ponderados. Outra forma é a utilização de previsões auto regressivas multi passos designadas "boosting". Também se poderiam eventualmente ter considerado modelos não lineares mas teriam outro tipo de complexidade, Tong[44], ultrapassando o âmbito do trabalho.

Outra hipótese poderia passar por não resolver o problema da previsão reduzindo-o ao contexto de séries temporais mas incluindo a possibilidade de fazer intervir variáveis explicativas. Isso envolveria ter acesso a outro tipo de informação por parte da empresa, o que não era o pretendido.

# Bibliografia

- [1] Akaike, H.(1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Trans*, 716-722.
- [2] Anderson, B.D.O. e Moore, J.B. (1979). Optimal filtering. *Prentice-Hall*.
- [3] Aoki, M. (1987). State space modeling of time series. *Berlin Heidelberg*.
- [4] Bartkiewicz, W. (2000). Confidence intervals prediction for the shortterm electrical load neural forecasting models. *Electrotechnic and Informations technic*, 8-12.
- [5] Bezerra, M.I.S. (2006). Apostila de Análise de Series Temporais. DMEC-UNESP.
- [6] Box, G.E.P e Jenkins, G.W (1976). Time Series Analysis, Forecasting and Control. Oakland,*Holden-Day*.
- [7] Cleveland, R.B., Cleveland, W.S., McRae, J.E. e Terpenning, I. (1990). Stl: a seasonal-trend decomposition procedure based on loess. *Journal of Official Statistics* 6, 3-73.
- [8] Dickey, D., e W. Fuller (1979). Distribution of the Estimators for Time Series: Regressions with a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*, 74 427-31.
- [9] Efron, B. (1986). Bootstrap methods for standart errors confidence intervals and other measures of estatistics accuracy. *Stat Sci*, v.1, p.54-77.

- [10] Efron, B. e Tibshirani, R. (1993). An introduction to the bootstrap. *New York: Chapman and Hall*.
- [11] Fan, Y. e Yao, J. (2005). Nonlinear time series: Nonparametrics and parametric methods. *Springer*.
- [12] Fisher, S. (1982). Séries Univariantes de tempo - Metodologia de Box & Jenkins. Tese de doutoramento, Fundação de Economia e Estatística.
- [13] Gardner, E.S.J. (1985). Exponential smoothing: The state of the art. *Journal of Forecasting*, 4, 1-28.
- [14] Grigoletto, M. (1998). Bootstrap prediction intervals for autoregressions: some alternatives. *International Journal of Forecasting*, 14, 447-456.
- [15] Hannan, E.J. e Deistler, M. (1988). The statistical theory of linear systems, *Wiley*.
- [16] Harvey D. (1990). The Condition of Postmodernity: an enquiry into the origins of cultural change. *Oxford Cambridge, Mass, USA*.
- [17] Holt, C.C. (1957). Forecasting seasonal and trends by exponentially weighted moving averages. *Office of Naval Research, Research Memorandum No.52*.
- [18] Hillier, F. e Lieberman, G. (1995). Introduction to Operations Research, 6 ed. Lisbon, *McGraw-Hill*.
- [19] Hyndman, R.J. e Athanasopoulos, G. (2014). Forecasting: principles and practice. *O Texts*.
- [20] Hyndman, R.J. e Khandakar, Y. (2008). Automatic time series forecasting: the forecast package for R. *Journal of Statistical Software*, 27(3).

- [21] Hyndman, R.J., Koehler, A.B., Ord, K. e Snyder, R.D. (2008). Forecasting with exponential smoothing: the state space approach. Berlin, *Heidelberg*.
- [22] Kalman, R.E. e Bucy, R.S. (1960). New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, 83(3): 95-108.
- [23] Kim, J.H. (2003). Forecasting autoregressive time series with bias-corrected parameter estimators. *International Journal of Forecasting*, 19, 3, 493-502.
- [24] Kwiatkowski, D., Phillips P.C.B., Schmidt, P., Shin, Y. (1992). Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root. *Journal of Econometrics*, 54, pp. 159-178, North-Holland.
- [25] Ljung, G.M. e Box, G.E.P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65, 297-303.
- [26] Makridakis, S., Wheelwright, S.C. e Hyndman, R.J. (1998). Forecasting: Methods and Applications. New York, *John Wiley & Sons*.
- [27] Masarotto, G. (1990). Bootstrap prediction intervals for autoregressions. *International Journal of Forecasting*, 6, 229-239.
- [28] Morettin, P.A. e Toloi, C.M.C. (1981). Modelos para Previsão de Séries Temporais, Vol.2, 13 Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, *MG*, Junho.
- [29] Morettin, P.A. e Toloi, C.M.C. (1981). Modelos para Previsão de Séries Temporais, Vol.1, 13 Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, *MG*, Junho.
- [30] Murteira, B.J.F., Muller, D.A. e Turkman, K.F. (1993). Análise de Sucessões Cronológicas. *McGraw Hill*, Lisboa.

- [31] Nelson, C.R. (1973). Applied time series analysis for managerial forecasting. San Francisco, *Holden-Day*.
- [32] Pankratz, A. e Dudley, U. (1987). Forecasts of power-transformed series. *Journal of Forecasting*, 6, 239-248, 18, 19.
- [33] Pascual, L., Romo, J. e Ruiz, E. (2004). Bootstrap predictive inference for ARIMA processes. *Journal of Time Series Analysis*, 25, 4, 449-465.
- [34] Pegels, C.C. (1969). Exponential forecasting: Some new variations. *Management Science*, 15, 311-315.
- [35] Pereira, B.B. (1980). Tópicos em Séries Temporais: Métodos Automáticos de Previsão. *COPPE/UFRJ*, Rio de Janeiro, Brasil.
- [36] Pires, A.P. (2001). Notas de Séries Temporais, Instituto Superior Técnico, LMAC.
- [37] Pitacas, M.I. (1999). Estudo Comparativo de Métodos de Previsão Aplicada à Série do Número Semanal de Adultos Alojados num Hotel, Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.
- [38] Priestley, M.B. (1975). The estimation of factor scores and Kalman filtering for discrete parameter stationary processes. *Int. J. Contr.*, 1, 971-975.
- [39] Ramos, P. (2012). Apontamentos da Unidade Curricular de Métodos Quantitativos. ISCAP-IPP.
- [40] Schwarz, F. (1978). Estimating the dimension of a model. *Ann. Stat.*, 6, 461-464.
- [41] Shumway, R.H. e Stoffer, D.S. (2006). Time Series Analysis and Its Applications. *Springer*, Second Edition.



- [42] Taylor, J. (2003). Exponential Smoothing with a Damped Multiplicative Trend. *International Journal of Forecasting*, Vol.19, 715-725.
- [43] Thombs, L.A. e Schucany, W.R. (1990). Bootstrap Prediction Intervals for Autoregression. *Journal of the American Statistical Association*, 85, 486-492.
- [44] Tong, H. (1990). Non-linear time series: a dynamical system approach. *Oxford University Press*, Oxford.
- [45] Winters, P. (1960). Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. *Management Science*, 324-342.
- [46] Yule, G. (1927). On a method of investigating periodicities in disturbed series with special reference to Wolfer's Sunspot Numbers. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A226, 267-298.



# Apêndices

## Apêndice A

Neste apêndice apresenta-se alguns programas usados para a obtenção das previsões obtidas no Capítulo 5. Os programas apresentados não estão comentados, mas têm uma estrutura simples, pelo que se assume que são de fácil leitura para um leitor familiarizado com o software estatístico R.

### A.1 Programa de previsão com a metodologia Box e Jenkins para o Perfil A 080

```
library(rJava) ; library(xlsxjars); library(xlsx); library(graphics); library(stats); library(MASS); library(astsa); library(zoo); library(timeDate); library(forecast); library(tseries)

# LEITURA DOS DADOS

x1<-read.table("A080003.txt",dec=".", header=TRUE)

x<-x1[c(1:132),3]

xst=ts(x,frequency=12, start=2004)

var(x)

mean(x)

plot(xst,xlab="anos", ylab="faturado")

# ESTACIONARIZAÇÃO EM VARIÂNCIA E IDENTIFICAÇÃO DO MODELO

lx=log(xst)
```

```

adf.test(lx)
kpss.test(lx)
mean(lx)
var(lx)
plot(lx,xlab="anos", ylab="log do faturado")
dev.new()
acf2(lx,50)
ddlxdiff(lx,12)
acf2(ddlx, 50)
plot.ts(cbind(xst,lx,ddlxdiff), main=)
adf.test(ddlx)
kpss.test(ddlx)
y=stl(lx, "per")
plot(y)

# ESCOLHA DO MODELO ATRAVÉS DO AIC e BIC
sarima(lx,1,0,1,0,0,1,12)
sarima(lx,1,0,1,1,0,0,12)
sarima(lx,1,0,1,1,0,1,12)
sarima(lx,1,0,0,0,0,1,12)
sarima(lx,1,0,0,1,0,0,12)
sarima(lx,1,0,0,1,0,1,12)
sarima(lx,0,0,1,0,0,1,12)
sarima(lx,0,0,1,1,0,0,12)
sarima(lx,0,0,1,1,0,1,12)

# ESTIMAÇÃO DOS PARÂMETROS
s=arima(lx,order=c(0,0,1),seasonal=list(order=c(0,0,1),period=12))

# AVALIAÇÃO DO MODELO
s$var.coef
t<-polyroot(c(1,-0.1381))
abs(t)
r<-polyroot(c(1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-0.1866))

```

```

abs(r)
adf.test(lx)
kpss.test(lx)
Box.test(s$residuals,lag=10, type='Box-Pierce')
tsdiag(s)
z=s$residuals
qqnorm(z)
qqline(z)
shapiro.test(z) ks.test(z,"pnorm",mean(z),sd(z))
# PREVISÃO
p<-sarima.for(lx,12,0,0,1,0,0,1,12)

exp(p$pred)

```

## **A.2 Programa de previsão usando os modelos ARIMA automáticos**

```

s=auto.arima(lx)
sarima(lx,2,1,1)
# AVALIAÇÃO DO MODELO
s$var.coef
t<-polyroot(c(1,-0.0515,0.1453))
abs(t)
t<-polyroot(c(1,0.9310))
abs(t)
Box.test(s$residuals,lag=10, type='Box-Pierce')
tsdiag(s)
z=s$residuals
hist(z)
qqnorm(z)
qqline(z)
shapiro.test(z) ks.test(z,"pnorm",mean(z),sd(z))
mean(z)

```

```

var(z)
# PREVISÃO
p<-sarima.for(lx,12,2,1,1)
p$pred
exp(p$pred)

```

### A.3 Estimação do coeficiente de alisamento $\alpha$ .

```

alexp=function(x,intervalo)
e=NULL
for(alpha in intervalo)
e2=0
prev=x[1]
for(i in 2:length(x))
prev=c(prev,alpha*x[i-1]+(1-alpha)*prev[i-1])
e2=e2+(x[i]-prev[i])**2
e=c(e,e2)
plot(intervalo,e,type="l",xlab=expression(alpha),ylab="Soma dos quadrados dos erros")
e.min=min(e)
alpha=intervalo[e==e.min]
prev=x[1]
for(i in 2:length(x)) prev=c(prev,alpha*x[i-1]+(1-alpha)*prev[i-1])
return(list(alpha=alpha,sq2=e.min,prev=prev))
m=alexp(x,seq(0.01,0.99,0.001))
m

```

### A.4 Programa de previsão usando os modelos de Alisamento Exponencial

```

library(rJava); library(xlsxjars); library(xlsx); library(MASS); library(graphics); library(stats);
library(utils); library(tseries); library(astsa); library(zoo); library(timeDate); library(forecast); li-
brary(hydroGOF).

```

```

# LEITURA DOS DADOS

```

```

x1<-read.table("A080003.txt",dec=",", header=TRUE)
x1
str(x1)
x<-x1[c(1:132),3]
xst=ts(x,frequency=12, start=2004)
plot(xst)
mean(x)
plot(decompose(xst))
# IDENTIFICAÇÃO DO MODELO
holt1 <- HoltWinters(xst,beta=FALSE)
holt2 <- HoltWinters(xst,beta=FALSE,gamma=FALSE)
holt1
holt2
# ANÁLISE RESIDUAL
s1<-residuals(holt1)
s2<-residuals(holt2)
plot(s1)
plot(s2)
mean(s2)
Box.test(s1,lag=10, type='Box-Pierce')
Box.test(s2,lag=10, type='Box-Pierce')
acf2(s1)
acf2(s2)
qqnorm(s1)
qqline(s1)
qqnorm(s2)
qqline(s2) ks.test(s1,"pnorm",mean(s1),sd(s1)) ks.test(s2,"pnorm",mean(s2),sd(s2))
# PREVISÃO
plot(fitted(holt1))
plot(fitted(holt2))
lines(fitted(holt2)[,1],col=3)

```

```

holt1$SSE
holt2$SSE
p1 <- predict(holt1, 12, prediction.interval = TRUE, level = 0.95)
p1
plot(holt1,p1)
p2 <- predict(holt2, 12, prediction.interval = TRUE, level = 0.95)
p2
plot(holt2, p2)

```

## A.5 Programa de previsão usando os modelos de Espaços de Estados

```

fit<-ets(xst)
fit
s<-residuals(fit)
plot(s)
mean(s)
Box.test(s,lag=10, type='Box-Pierce')
acf2(s)
qqnorm(s)
qqline(s) ks.test(s,"pnorm",mean(s),sd(s))
prev<-forecast(fit, 12)
prev
plot(prev)
summary(prev)

```

## A.6 Intervalos de Previsão usando o Método Bootstrap

```

# 1ºPASSO:
z a<-z-mean(z)
# 2ºPASSO:
y<-numeric()
phi1<-s$coef[1]

```



```

phi2<-s$coef[2]
theta1<-s$coef[3]
B<-1000
p1<-numeric(B)
p2<-numeric(B)
p3<-numeric(B)
p4<-numeric(B)
p5<-numeric(B)
p6<-numeric(B)
p7<-numeric(B)
for(b in 1:B)
i<-sample(1:132,size=132,replace=TRUE)
aT<-a[i]
y[1]<- aT[1]
y[2]<-(1+phi1)*y[1]+aT[2]-theta1*aT[1]
y[3]<-(1+phi1)*y[2]+(phi2-phi1)*y[1]+aT[3]-theta1*aT[2]
for(i in 4:132)
y[i]<-(1+phi1)*y[i-1]+(phi2-phi1)*y[i-2]-phi2*y[i-3]+aT[i]-theta1*aT[i-1]
y s2=arima(y,order=c(2,1,1))
n<-s2$coef
#3ºPASSO:
aT[133]<-sample(a,1)
aT[134]<-sample(a,1)
aT[135]<-sample(a,1)
aT[136]<-sample(a,1)
aT[137]<-sample(a,1)
aT[138]<-sample(a,1)
aT[139]<-sample(a,1)
x2<-y[c(1:130)]
x2[131]<-lx[131]
x2[132]<-lx[132]

```

```

for(k in 133:139)
x2[k]<-(1+n[1])*x2[k-1]+(n[2]-n[1])*x2[k-2]-n[2]*x2[k-3]+aT[k]-n[3]*aT[k-1]
p1[b]<-x2[133]
p2[b]<-x2[134]
p3[b]<-x2[135]
p4[b]<-x2[136]
p5[b]<-x2[137]
p6[b]<-x2[138]
p7[b]<-x2[139]
mean(p1)
mean(p2)
mean(p3)
mean(p4)
mean(p5)
mean(p6)
mean(p7)
exp(mean(p1))
exp(mean(p2))
exp(mean(p3))
exp(mean(p4))
exp(mean(p5))
exp(mean(p6))
exp(mean(p7))
# 5ºPASSO:
ic1<-p1[order(p1)]
L1<-quantile(ic1,0.025)
U1<-quantile(ic1,0.975)
exp(L1)
exp(U1)
ic2<-p2[order(p2)]
L2<-quantile(ic2,0.025)

```

```

U2<-quantile(ic2,0.975)
exp(L2)
exp(U2)
ic3<-p3[order(p3)]
L3<-quantile(ic3,0.025)
U3<-quantile(ic3,0.975)
exp(L3)
exp(U3)
ic4<-p4[order(p4)]
L4<-quantile(ic4,0.025)
U4<-quantile(ic4,0.975)
exp(L4)
exp(U4)
ic5<-p5[order(p5)]
L5<-quantile(ic5,0.025)
U5<-quantile(ic5,0.975)
exp(L5)
exp(U5)
ic6<-p6[order(p6)]
L6<-quantile(ic6,0.025)
U6<-quantile(ic6,0.975)
exp(L6)
exp(U6)
ic7<-p7[order(p7)]
L7<-quantile(ic7,0.025)
U7<-quantile(ic7,0.975)
exp(L7)
exp(U7)

```

# Apêndice B

Neste apêndice apresenta-se algumas tabelas que contêm todos os tipos de modelos de Alisamento Exponencial e todos os modelos de Espaço de Estados.

T	S		
	N	A	M
N	$\hat{y}_{t+h t} = l_t$ $l_t = \alpha y_t + (1-\alpha)l_{t-1}$	$\hat{y}_{t+h t} = l_t + s_{t-m+h_m^*}$ $l_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)l_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - l_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m}$	$\hat{y}_{t+h t} = l_t s_{t-m+h_m^*}$ $l_t = \alpha(y_t / s_{t-m}) + (1-\alpha)l_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t / l_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m}$
A	$\hat{y}_{t+h t} = l_t + hb_t$ $l_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(l_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}$	$\hat{y}_{t+h t} = l_t + hb_t + s_{t-m+h_m^*}$ $l_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)(l_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m}$	$\hat{y}_{t+h t} = (l_t + hb_t)s_{t-m+h_m^*}$ $l_t = \alpha(y_t / s_{t-m}) + (1-\alpha)(l_{t-1} + b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t / (l_{t-1} + b_{t-1})) + (1-\gamma)s_{t-m}$
A <sub>d</sub>	$\hat{y}_{t+h t} = l_t + \phi b_t$ $l_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(l_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta^*)\phi b_{t-1}$	$\hat{y}_{t+h t} = l_t + \phi b_t + s_{t-m+h_m^*}$ $l_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)(l_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta^*)\phi b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - l_{t-1} - \phi b_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m}$	$\hat{y}_{t+h t} = (l_t + \phi b_t)s_{t-m+h_m^*}$ $l_t = \alpha(y_t / s_{t-m}) + (1-\alpha)(l_{t-1} + \phi b_{t-1})$ $b_t = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1-\beta^*)\phi b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t / (l_{t-1} + \phi b_{t-1})) + (1-\gamma)s_{t-m}$
M	$\hat{y}_{t+h t} = l_t b_t^h$ $l_t = \alpha y_t + (1-\alpha)l_{t-1}b_{t-1}$ $b_t = \beta^*(l_t / l_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}$	$\hat{y}_{t+h t} = l_t b_t^h + s_{t-m+h_m^*}$ $l_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)l_{t-1}b_{t-1}$ $b_t = \beta^*(l_t / l_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t - l_{t-1}b_{t-1}) + (1-\gamma)s_{t-m}$	$\hat{y}_{t+h t} = l_t b_t^h s_{t-m+h_m^*}$ $l_t = \alpha(y_t / s_{t-m}) + (1-\alpha)l_{t-1}b_{t-1}$ $b_t = \beta^*(l_t / l_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}$ $s_t = \gamma(y_t / (l_{t-1}b_{t-1})) + (1-\gamma)s_{t-m}$
M <sub>d</sub>	$\hat{y}_{t+h t} = l_t b_t^{\phi}$ $l_t = \alpha y_t + (1-\alpha)l_{t-1}b_{t-1}^{\phi}$ $b_t = \beta^*(l_t / l_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}^{\phi}$	$\hat{y}_{t+h t} = l_t b_t^{\phi} + s_{t-m+h_m^*}$ $l_t = \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1-\alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}^{\phi})$ $b_t = \beta^*(l_t / l_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}^{\phi}$ $s_t = \gamma(y_t - l_{t-1} - b_{t-1}^{\phi}) + (1-\gamma)s_{t-m}$	$\hat{y}_{t+h t} = l_t b_t^{\phi} s_{t-m+h_m^*}$ $l_t = \alpha(y_t / s_{t-m}) + (1-\alpha)(l_{t-1}b_{t-1}^{\phi})$ $b_t = \beta^*(l_t / l_{t-1}) + (1-\beta^*)b_{t-1}^{\phi}$ $s_t = \gamma(y_t / (l_{t-1}b_{t-1}^{\phi})) + (1-\gamma)s_{t-m}$

Figura 1: Modelos de Alisamento Exponencial, Hyndman e Athanasopoulos[17].

<b>T</b>	<b>S</b>		
	<b>N</b>	<b>A</b>	<b>M</b>
<b>N</b>	$y_t = l_{t-1} + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$	$y_t = l_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$	$y_t = l_{t-1} s_{t-m} + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / l_{t-1}$
<b>A</b>	$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t$	$y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$	$y_t = (l_{t-1} + b_{t-1}) s_{t-m} + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / (l_{t-1} + b_{t-1})$
<b>A<sub>d</sub></b>	$y_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta \varepsilon_t$	$y_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta \varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$	$y_t = (l_{t-1} + \phi b_{t-1}) s_{t-m} + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / s_{t-m}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / (l_{t-1} + \phi b_{t-1})$
<b>M</b>	$y_t = l_{t-1} b_{t-1} + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / l_{t-1}$	$y_t = l_{t-1} b_{t-1} + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / l_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$	$y_t = l_{t-1} b_{t-1} s_{t-m} + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} b_{t-1} + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1} + \beta \varepsilon_t / (l_{t-1} s_{t-m})$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / (l_{t-1} b_{t-1})$
<b>M<sub>d</sub></b>	$y_t = l_{t-1} b_{t-1}^\phi + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} b_{t-1}^\phi + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta \varepsilon_t / l_{t-1}$	$y_t = l_{t-1} b_{t-1}^\phi + s_{t-m} + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} b_{t-1}^\phi + \alpha \varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta \varepsilon_t / l_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t$	$y_t = l_{t-1} b_{t-1}^\phi s_{t-m} + \varepsilon_t$ $l_t = l_{t-1} b_{t-1}^\phi + \alpha \varepsilon_t / s_{t-m}$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta \varepsilon_t / (l_{t-1} s_{t-m})$ $s_t = s_{t-m} + \gamma \varepsilon_t / (l_{t-1} b_{t-1}^\phi)$

Figura 2: Modelos de espaço de estados com erros aditivos, Hyndman e Athanasopoulos[17]-representação de modelos ETS na forma de espaço de estados.

T	S		
	N	A	M
N	$y_t = l_{t-1}(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = l_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$	$y_t = (l_{t-1} + s_{t-m})(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = l_{t-1} + \alpha(l_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(l_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = l_{t-1}s_{t-m}(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = l_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$
A	$y_t = (l_{t-1} + b_{t-1})(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = (l_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} + \beta(l_{t-1} + b_{t-1})\varepsilon_t$	$y_t = (l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha(l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta(l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = (l_{t-1} + b_{t-1})s_{t-m}(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = (l_{t-1} + b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1} + \beta(l_{t-1} + b_{t-1})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$
A <sub>d</sub>	$y_t = (l_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = (l_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(l_{t-1} + \phi b_{t-1})\varepsilon_t$	$y_t = (l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha(l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(l_{t-1} + \phi b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = (l_{t-1} + \phi b_{t-1})s_{t-m}(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = (l_{t-1} + \phi b_{t-1})(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = \phi b_{t-1} + \beta(l_{t-1} + \phi b_{t-1})\varepsilon_t$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$
M	$y_t = l_{t-1}b_{t-1}(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}(1 + \beta\varepsilon_t)$	$y_t = (l_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m})(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1} + \alpha(l_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1} + \beta(l_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t / l_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(l_{t-1}b_{t-1} + s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = l_{t-1}b_{t-1}s_{t-m}(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1}(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}(1 + \beta\varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$
M <sub>d</sub>	$y_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}^\phi(1 + \beta\varepsilon_t)$	$y_t = (l_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m})(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi + \alpha(l_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m})\varepsilon_t$ $b_t = b_{t-1}^\phi + \beta(l_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m})\varepsilon_t / l_{t-1}$ $s_t = s_{t-m} + \gamma(l_{t-1}b_{t-1}^\phi + s_{t-m})\varepsilon_t$	$y_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi s_{t-m}(1 + \varepsilon_t)$ $l_t = l_{t-1}b_{t-1}^\phi(1 + \alpha\varepsilon_t)$ $b_t = b_{t-1}^\phi(1 + \beta\varepsilon_t)$ $s_t = s_{t-m}(1 + \gamma\varepsilon_t)$

onde  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < \alpha$  e  $0 < \gamma < 1 - \alpha$ .

Figura 3: Modelos de espaço de estados com erros multiplicativos, considerando Hyndman e Athanasopoulos[17].